فهرست

نمونه سؤال امتحانی

بارم‌بندی درس آمار و احتمال

<table>
<tr><th colspan="2">شماره فصل</th><th>نوبت اول</th><th>نوبت دوم</th></tr>
<tr><td colspan="2">اول</td><td>۱۲</td><td>۴/۵</td></tr>
<tr><td rowspan="2">دوم</td><td>تا صفحه ۵۱</td><td>۸</td><td rowspan="2">۵/۵</td></tr>
<tr><td>صفحه ۵۱ به بعد</td><td>—</td></tr>
<tr><td colspan="2">سوم</td><td>—</td><td>۶</td></tr>
<tr><td colspan="2">چهارم</td><td>—</td><td>۴</td></tr>
<tr><td colspan="2">جمع</td><td>۲۰</td><td>۲۰</td></tr>
</table>

1 بخش

درسنامه

و سؤالات تشریحی

فصل اول

آشنایی با مبانی ریاضیات ۱

فصل اول آمار و احتمال در امتحان نوبت اول ۱۲ نمره و در نوبت دوم ۴/۵ نمره و در شهریور و دی ۵ نمره دارد.
در این فصل مباحثی چون منطق ریاضی، نقیض یک گزاره و ترکیب گزاره‌ها، ترکیب شرطی و ترکیب دوشرطی، سورها، مجموعه و زیر مجموعه، تعریف زیر مجموعه به کمک نمادهای ریاضی، قوانین و اعمال بین مجموعه‌ها، جبر مجموعه‌ها و ضرب دکارتی بین دو مجموعه مطرح شده است.

فیلم شب امتحان

برای استفاده از فیلم‌های آموزشی شب امتحان هربسته QR-codeهای مقابل را اسکن کنید.

بسته‌های ۱ تا ۴

بسته‌های ۵ تا ۸

بسته اول

آشنایی با منطق ریاضی

صفحه ۲ تا ۴ کتاب درسی

منطق ریاضی

منطق ریاضی که عده‌ای به آن منطق نمادین نیز می‌گویند، دستور زبان ریاضی یا مطالعه و تحلیل ساختار جمله‌هایی است که در ریاضی به کار برده می‌شود. این شاخه از ریاضیات به بررسی دقیق استدلال‌ها می‌پردازد و اعتبار یک استدلال را مشخص می‌کند.

گزاره

■ **تعریف گزاره:** به جمله‌ای خبری که در حال حاضر یا آینده، دارای ارزش درست یا نادرست (راست یا دروغ) باشد، گزاره می‌گوییم. معمولاً گزاره‌ها را با حروف p ، q ، r و ... نمایش می‌دهیم.

■ **ارزش گزاره:** درست یا نادرست بودن یک گزاره را ارزش گزاره می‌گوییم. ارزش گزارهٔ درست را با حرف «د» یا « T » و ارزش گزارهٔ نادرست را با حرف «ن» یا « F » نمایش می‌دهیم. مثلاً «۷ عددی اول است.» یک گزاره با ارزش درست است و «۹ عددی زوج است.» یک گزاره با ارزش نادرست است و «کتاب آمار و احتمال را مطالعه کن.» اصلاً گزاره نیست، چون ارزش آن معلوم نیست.

تذکر جملات امری، پرسشی و عاطفی (نشان‌دهندهٔ احساسات) گزاره نیستند، زیرا خبری را بیان نمی‌کنند، مانند:

چه روز خوبی! (ابراز احساسات)

لطفاً کتاب من را بدهید. (امری)

آیا جذر عدد $\sqrt{۴۹}$ برابر ۷ است؟ (پرسشی)

توجه ارزش یک گزاره نمی‌تواند هم درست باشد و هم نادرست، یعنی گزاره فقط دارای یک ارزش است.

! نکته حدس‌ها در ریاضیات به مسائل حل‌نشده‌ای می‌گویند که پروندهٔ آن‌ها در جهان علم باز است. این‌گونه مسائل علاوه بر این‌که درستی آن‌ها اثبات نشده است، تاکنون هم برای آن‌ها مثال نقض پیدا نشده است، مانند حدس گلدباخ که در زیر آمده است.
«هرعدد زوج بزرگ‌تر از ۲ را می‌توان به‌صورت حاصل‌جمع دو عدد اوّل نوشت.»

سؤال **از بین جمله‌های زیرگزاره را مشخص کنید و ارزش آن را تعیین کنید.**

۱ در پرتاب دو سکه احتمال آن‌که هر دو بار «رو» بیاید برابر با $\frac{۱}{۴}$ است.

۲ آیا حافظ شاعر خوبی است؟

۳ ۵۱ عددی اول است.

۴ به به چه گل زیبایی!

پاسخ ۱ یک گزاره است و ارزش گزاره درست است، زیرا: $P(A)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}$. ۲ گزاره نیست، زیرا یک جملهٔ پرسشی است. ۳ یک گزاره است و ارزش گزاره نادرست است، زیرا عدد ۵۱ مضرب ۳ و ۱۷ می‌باشد. ۴ گزاره نیست، زیرا جملهٔ عاطفی (ابراز احساسات) است.

جدول ارزش گزاره‌ها

هر گزاره دارای ارزش درست یا نادرست است، بنابراین هر گزاره مانند **p** فقط یکی از دو حالت ارزش گزاره را دارد.

p
د
ن

ارزش‌های دو گزارهٔ p و q طبق جدول روبه‌رو دارای ۴ حالت است:

q	p
د	د
ن	د
د	ن
ن	ن

نکته تعداد ارزش هر گزاره دو حالت است. بنابراین جدول ارزش‌های n گزاره با توجه به اصل ضرب دارای ۲^n حالت می‌باشد. به عنوان مثال جدول ارزش ۴ گزاره $۲^۴=۱۶$ حالت دارد.

نقیض یک گزاره

نقیض گزارهٔ p را به‌صورت $\sim p$ می‌نویسیم و آن را «چنین نیست که p» می‌خوانیم. به علامت « ~ » ناقض گفته می‌شود و «چنین نیست که» خوانده می‌شود.
مثلاً: «مجموع زاویه‌های داخلی هر متوازی‌الاضلاع برابر ۳۶۰° است.» یک گزاره است که نقیض آن برابر است با «چنین نیست که مجموع زاویه‌های داخلی هر متوازی‌الاضلاع برابر ۳۶۰° باشد.» که معادل است با «مجموع زاویه‌های داخلی هر متوازی‌الاضلاع برابر ۳۶۰° نیست.»

ارزش نقیض یک گزاره

اگر ارزش گزارهٔ p درست باشد، در این صورت ارزش گزارهٔ $\sim p$ نادرست است و وقتی که ارزش گزارهٔ p نادرست باشد، ارزش نقیض آن درست است.

$\sim(\sim p)$	$\sim p$	p
د	ن	د
ن	د	ن

گزاره‌های هم‌ارز منطقی

اگر دو گزارهٔ p و q همواره ارزش یکسان داشته باشند، می‌گوییم این دو گزاره، هم‌ارز منطقی هستند و می‌نویسیم $p\equiv q$ و می‌خوانیم « P هم‌ارز است با q ».
با توجه به جدول بالا، دو گزارهٔ p و $\sim(\sim p)$ هم‌ارز منطقی هستند، پس $p\equiv\sim(\sim p)$

سؤال **گزارهٔ « ۵ > ۲ » را دو بار نقیض کنید:**

پاسخ $p:(۲<۵)\Rightarrow\sim p:(۲\not<۵)\Rightarrow\sim p:(۲\geq۵)\Rightarrow\sim(\sim p):(۲\not\geq۵)\Rightarrow\sim(\sim p):(۲<۵)$

در نتیجه p هم‌ارز منطقی با $\sim(\sim p)$ است.

گزاره‌نما

■ **تعریف گزاره‌نما:** هر جملهٔ خبری که شامل یک یا چند متغیر است و با جایگذاری مقادیری به جای متغیر به یک گزاره تبدیل شود، گزاره‌نما نامیده می‌شود. گزاره‌نماها را بر حسب تعداد متغیر به کار رفته در آن‌ها، یک‌متغیره، دومتغیره و ... می‌نامیم. مثلاً «$x + y < 2$» یک گزاره‌نمای دومتغیره است.

سؤال کدام‌یک از جمله‌های زیر گزاره‌نما است؟ در صورتی‌که جمله گزاره‌نما باشد، چند متغیره بودن آن را مشخص کنید.

۱ x عددی زوج است.

۲ ۲ تنها عدد زوج اول است.

۳ حاصل‌جمع دو برابر عددی با عدد دیگری برابر با ۷ است.

پاسخ **۱** x عددی زوج است. اگر به جای x عدد ۲ قرار بگیرد، ارزش جملهٔ خبری درست است و اگر به جای x عدد ۳ قرار بگیرد، ارزش جملهٔ خبری نادرست است. پس این جمله یک گزاره‌نماست که دارای یک متغیر x است، پس یک گزاره‌نمای یک‌متغیره می‌باشد.

۲ این جمله متغیر ندارد و گزاره‌نما نیست، بلکه گزاره‌ای با ارزش درست است.

۳ عدد اول را x و عدد دوم را y در نظر می‌گیریم، در این صورت «حاصل‌جمع دو برابر عددی با عدد دیگری برابر ۷ است.» به صورت $2x + y = 7$ می‌باشد. در این جمله مثلاً می‌توانیم x را مساوی یک قرار دهیم. حال اگر $y = 5$، آن‌گاه $2(1) + 5 = 7$ ارزش جملهٔ خبری درست است؛ اما اگر $y = 2$، آن‌گاه $2(1) + 2 \neq 7$ ارزش جملهٔ خبری نادرست است. پس این جمله یک گزاره‌نما می‌باشد که به دلیل وجود دو متغیر x و y در جمله، یک گزاره‌نما با دو متغیر است.

دامنهٔ متغیر گزاره‌نما و مجموعه جواب گزاره‌نما

■ **دامنهٔ متغیر گزاره‌نما:** در هر گزاره‌نما به مجموعهٔ مقادیری که می‌توان آن‌ها را به جای متغیرهای گزاره‌نما قرار داد تا این‌که گزاره‌نما تبدیل به گزاره شود، دامنهٔ متغیر گزاره‌نما می‌گوییم و آن را با حرف D نمایش می‌دهیم.

■ **مجموعه جواب گزاره‌نما:** در هر گزاره‌نما به مجموعهٔ عضوهایی از دامنهٔ متغیر که به ازای آن‌ها، گزاره‌نما تبدیل به گزاره‌ای با ارزش درست می‌شود، مجموعه جواب گزاره‌نما می‌گوییم و آن را با حرف S نمایش می‌دهیم و همواره داریم $S \subseteq D$

سؤال دامنهٔ متغیر و مجموعه جواب را در گزاره‌نماهای زیر مشخص کنید.

۱ a عددی فرد است. **۲** $5x^2 + 7x - 12 = 0$

پاسخ **۱** دامنهٔ متغیر گزاره‌نما مجموعهٔ اعداد صحیح است $(D = \mathbb{Z})$ و مجموعه جواب آن اعداد فرد صحیح $S = \{\cdots, -3, -1, 1, 3, \cdots\}$ است.

۲ دامنهٔ متغیر گزاره‌نما اعداد حقیقی است $(D = \mathbb{R})$ و مجموعه جواب آن $S = \{1, -\frac{12}{5}\}$ است. (دقت کنید که دامنهٔ همهٔ معادله‌ها مجموعهٔ اعداد حقیقی است، مگر آن‌که در صورت سؤال محدود شده باشد.)

بسته ۱ پرسش‌های تشریحی — آشنایی با منطق ریاضی

۱. جای خالی را با عبارت مناسب پرکنید.

آ) منطق ریاضی که عده‌ای آن را منطق .... نیز می‌گویند، دستور زبان ریاضی، یا .... جمله‌هایی است که در ریاضی به کار برده می‌شود.

ب) گزاره جمله‌ای .... است که یا .... است یا ....

پ) هر جملهٔ خبری که شامل یک یا چند .... است و با جای‌گذاری مقادیری به جای متغیر به یک .... تبدیل شود، .... نامیده می‌شود.

۲. از بین جمله‌های زیر گزاره‌ها را مشخص کنید و در صورت امکان ارزش آن‌ها را تعیین کنید.

آ) پروفسور سمیعی یک ریاضی‌دان ایرانی است. ب) تالس یک ریاضی‌دان است.

پ) چه هوای سردی است! ت) لطفاً از کلاس خارج شوید.

ث) عدد $3^9 + 8$ عددی اول است. ج) به امید دیدار دوباره!

چ) $2^3 - 1 < 9$ ح) در هر متوازی‌الاضلاع، زاویه‌های روبه‌رو هم‌اندازه نمی‌باشند.

خ) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ د) $\{5\} \in \{2, 3, 5\}$

ذ) هر عدد زوج بزرگ‌تر از ۲ را می‌توان به‌صورت حاصل‌جمع دو عدد اوّل نوشت.

ر) آمار، مجموعه‌ای از اعداد، ارقام و اطلاعات است.

۳. در جاهای خالی عدد یا علامت مناسب قرار دهید، به طوری که گزاره‌های حاصل دارای ارزش درست باشند. (مشابه تمرین ۱ صفحهٔ ۱۴ کتاب درسی)

آ) $۱۸ = ۳ \square ۱۵$　ب) $۲۴ = (۵ - \square)۶$　پ) $۰ = \frac{\square}{\sqrt{۳}}$　ت) $\{۳,۴,۵\} \square ۵$

ث) $\mathbb{N} \notin \square + ۷$　ج) $\frac{۶ \times ۴}{۳} \square ۹ \times ۲$　چ) $\frac{۹ \times ۴}{۳} \square ۶ \times ۲$　ح) $\mathbb{Z} \in \square \div ۱۷$

۴. نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید. (مشابه تمرین ۲ صفحهٔ ۱۴ کتاب درسی)

آ) $۱۰ > \sqrt{۱۰}$　ب) $\frac{۱۵}{۳} \geq ۳$　پ) $\{۱,۲,۵\} \ni ۳$

ت) $۲^۵ = ۲^۳ + ۲^۲$　ث) سعدی شاعر ایرانی است.　ج) ۱۹۷۱ عددی اول است.

چ) ۳ عددی فرد است یا عدد $\sqrt{۲}$ گویا است.　ح) $(۵ > ۱^۵) \wedge (۲^{-۱} > ۲)$

۵. ارزش‌های سه گزارهٔ p و q و r طبق جدول زیر است. جاهای خالی را پر کنید.

p	q	r
د	د	
	د	ن
د		د
	ن	
ن	د	
ن		
	ن	
ن		ن

۶. در هر قسمت، گزاره‌نما را مشخص کنید و چند متغیره بودن آن را بنویسید.

آ) $x + ۱$ عددی زوج است.　ب) فضای نمونه‌ای پرتاب یک سکه $S = \{\text{پ} , \text{ر}\}$ است.

پ) حاصل‌ضرب دو عدد برابر ۱۲ است. $(a \times b = ۱۲)$

۷. گزاره‌های با ارزش درست و گزاره‌های با ارزش نادرست را با قرار دادن چهار مقدار برای هرکدام از گزاره‌نماهای زیر بنویسید.

(مشابه کار در کلاس صفحهٔ ۴ کتاب درسی)

آ) $۳a + ۴$ عددی زوج است.　ب) تفاضل دو عدد برابر ۷ است.　پ) مجموع سه عدد برابر ۱۰ است.

۸. دامنهٔ متغیر هر یک از گزاره‌نماهای زیر، مجموعهٔ اعداد طبیعی است. مجموعه جواب هر یک را بنویسید.

آ) $۱ > \frac{۱}{x - ۱}$　ب) $۸ = \sqrt{x}$　پ) $\{۲k(k+۱) \mid k \in \mathbb{N}\}$

۹. دامنهٔ متغیر گزاره‌نماها و مجموعه جواب آن‌ها را بنویسید.

آ) x عددی اول است.　ب) x عددی مضرب ۳ به اضافهٔ یک است. $x = ۳k + ۱ : k \in \mathbb{Z}$

پ) $x^۲ + ۳x - ۴ = ۰$

بستهٔ دوم

ترکیب گزاره‌ها

صفحهٔ ۴ تا ۷ کتاب درسی

رابط‌های گزاره‌ای

رابط‌های گزاره‌ای عبارتند از «و»، «یا»، «اگر - آن‌گاه»، «اگر و فقط اگر» که گزاره‌های ساده را به هم مربوط می‌کنند.

ترکیب گزاره‌ها

از ترکیب دو یا چند گزاره به وسیلهٔ رابط‌های گزاره‌ای (ادات ربط) گزاره‌های مرکب به‌دست می‌آید. (دقت کنید که در گزارهٔ مرکب، تعداد گزاره‌ها باید محدود باشد.) به عنوان مثال جملهٔ «عدد ۳ فرد است و عدد ۱۴ زوج است.» یک گزارهٔ مرکب است و جملهٔ «عدد ۳ فرد است و عدد ۵ فرد است و عدد ۷ فرد است و ...» گزارهٔ مرکب نیست، زیرا تعداد گزاره‌ها محدود نیست.

ترکیب فصلی دو گزاره

هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزارهٔ مرکب « p یا q » را به‌صورت « $p \vee q$ » می‌نویسند و به آن **ترکیب فصلی** دو گزاره می‌گوییم. در این‌جا به رابط منطقی « $\vee$ » **فاصل** گفته می‌شود.

ارزش گزارهٔ مرکب $p \vee q$ وقتی نادرست است که ارزش هر دوی p و q نادرست باشد و در بقیهٔ حالات، ارزش $p \vee q$ درست است. یا به عبارتی در ترکیب فصلی، اگر حداقل ارزش یک گزاره درست باشد، ارزش ترکیب فصلی درست است.

جدول ارزش گزارهٔ $p \vee q$ به‌صورت روبه‌رو است:

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

توجه هرگاه گزارهٔ مرکب همواره درست باشد، ارزش منطقی آن « T » و اگر همواره نادرست باشد، ارزش منطقی آن « F » است.

سؤال ارزش گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

۱) $(-۳ \in \mathbb{Z}) \vee (۲ \in \mathbb{Q})$

۲) $(\frac{۱}{۳} \neq \frac{۲}{۶}) \vee (\frac{۳۶}{۱۸} = ۲)$

۳) «۴ یک عدد اول یا ۴ عدد مرکب است.»

۴) $(A \not\subseteq A \vee \varnothing \not\subseteq A)$

پاسخ ۱) ارزش گزارهٔ $(۲ \in \mathbb{Q})$ درست و ارزش گزارهٔ $(-۳ \in \mathbb{Z})$ نیز درست است، پس ارزش گزارهٔ ترکیب فصلی آن‌ها نیز درست است.

۲) ارزش گزارهٔ $(\frac{۳۶}{۱۸} = ۲)$ درست و ارزش گزارهٔ $(\frac{۲}{۶} \neq \frac{۱}{۳})$ نادرست است، پس ارزش گزارهٔ ترکیب فصلی آن‌ها درست است.

۳) ارزش گزارهٔ «۴ یک عدد اول است.» نادرست است و ارزش گزارهٔ «۴ یک عدد مرکب است.» درست است، پس ارزش گزارهٔ ترکیب فصلی آن‌ها درست است.

۴) ارزش گزارهٔ « $\varnothing \not\subseteq A$ » نادرست است و ارزش گزارهٔ « $A \not\subseteq A$ » نادرست است، پس ارزش گزارهٔ ترکیب فصلی آن‌ها نادرست است.

ترکیب عطفی دو گزاره

هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزارهٔ مرکب « $p \wedge q$ » را که خوانده می‌شود « p و q »، ترکیب عطفی دو گزاره می‌گوییم. در این‌جا به رابط منطقی « $\wedge$ » **عاطف** گفته می‌شود.

ارزش ترکیب عطفی دو گزاره

ارزش ترکیب عطفی دو گزاره وقتی درست است که ارزش هر دو گزارهٔ p و q درست باشد و در بقیهٔ حالات، ارزش گزارهٔ $p \wedge q$ نادرست است، یا به عبارتی در گزارهٔ عطفی اگر حداقل ارزش یک گزاره نادرست باشد، ارزش گزارهٔ عطفی نیز نادرست است.

جدول ارزش گزارهٔ $p \wedge q$ به‌صورت روبه‌رو است:

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

سؤال ارزش گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

۱) $\sqrt{۲}$ عددی گویا و $\sqrt{۷}$ عددی گنگ است.

۲) $(\frac{۵}{۳} < \frac{۷}{۴}) \wedge (\frac{۴}{۱۶} = \frac{۱}{۴})$

پاسخ ۱) ارزش گزارهٔ « $\sqrt{۲}$ عددی گویا است.» نادرست است و ارزش گزارهٔ « $\sqrt{۷}$ عددی گنگ است.» درست است، پس ارزش گزارهٔ ترکیب عطفی آن‌ها نادرست است.

۲) ارزش گزارهٔ $(\frac{۵}{۳} < \frac{۷}{۴})$ درست است و ارزش گزارهٔ $(\frac{۴}{۱۶} = \frac{۱}{۴})$ درست است، پس ارزش گزارهٔ ترکیب عطفی آن‌ها نیز درست است.

سؤال مقادیر x و y را چنان بیابید که داشته باشیم: $|x-۱|+(x+۲y)^۲=۰$

پاسخ چون $(x+۲y)^۲\geq ۰$ و $|x-۱|\geq ۰$، بنابراین تساوی بالا وقتی برقرار است که:

$$((x+۲y)^۲=۰)\wedge(|x-۱|=۰)\Rightarrow\begin{cases}x-۱=۰\Rightarrow x=۱\\ \wedge\\ x+۲y=۰\Rightarrow ۱+۲y=۰\Rightarrow ۲y=-۱\Rightarrow y=-\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

در نتیجه رابطهٔ بالا وقتی درست است که $y=-\frac{۱}{۲}$ و $x=۱$ باشد.

تذکر به دو هم‌ارزی زیر **قانون دمورگان** در منطق ریاضی گفته می‌شود:

$$\begin{cases}\sim(p\vee q)\equiv(\sim p)\wedge(\sim q)\\ \sim(p\wedge q)\equiv(\sim p)\vee(\sim q)\end{cases}$$

(اثبات این قوانین در تمرین‌ها آمده است.)

مثلاً نقیض گزارهٔ $(a=b)\vee(a<b)$ برابر است با $(a\neq b)\wedge(a\not< b)$، به عبارتی نقیض گزارهٔ $(a\leq b)$ برابر $(a>b)$ می‌باشد. یعنی:

$$\sim(a\leq b)\Rightarrow(a\neq b)\wedge(a\not< b)\Rightarrow(a\neq b)\wedge(a\geq b)\Rightarrow a>b$$

هم‌ارزی منطقی بین گزاره‌های مرکب

۱ قوانین جابه‌جایی

$$\begin{cases}p\vee q\equiv q\vee p\\ p\wedge q\equiv q\wedge p\end{cases}$$

۲ قوانین شرکت‌پذیری

$$\begin{cases}(p\vee q)\vee r\equiv p\vee(q\vee r)\\ (p\wedge q)\wedge r\equiv p\wedge(q\wedge r)\end{cases}$$

۳ قوانین توزیع‌پذیری (پخشی)

$$\begin{cases}p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r)\\ p\vee(q\wedge r)\equiv(p\vee q)\wedge(p\vee r)\end{cases}$$

(اثبات این قوانین در تمرین‌ها آمده است.)

مثلاً در ترکیب فصلی «۶ عددی زوج است.» ∨ «۶ عددی مرکب است.» اگر دو گزاره را جابه‌جا کنیم، گزاره‌ای هم‌ارز گزارهٔ اول به‌دست می‌آید.

یعنی «۶ عددی مرکب است.» ∨ «۶ عددی زوج است.» هم‌ارز گزارهٔ اول است.

بسته ۲ پرسش‌های تشریحی | ترکیب گزاره‌ها

۱۰. با داشتن چهار گزاره p، q، r و s در ترکیب عطفی تعداد حالت‌های نادرست چقدر است؟

۱۱. جدول زیر را کامل کنید: (مشابه تمرین ۴ صفحه ۱۴ کتاب درسی)

گزارهٔ p	گزارهٔ q	ارزش p	ارزش q	ارزش $p\vee q$	ارزش $p\wedge q$
مهر اولین ماه فصل پاییز است.	تهران پایتخت ایران است.	د			
۵ عددی اول است.			ن		
۲ عددی زوج نیست.			د		
				ن	

۱۲. کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست است؟

آ) $(-۳)^۲=۹\vee(۵<۷)$

ب) ۹۳ عددی فرد یا عددی اول است.

پ) $(۲^۹=۵۱۲)\vee(۵^۴=۱۲۵)$

ت) $(\sqrt{۳^۲+۵^۲}=۳+۵)\vee((۳+۵)!=۳!+۵!)$

۱۳. کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست است؟

آ) عدد ۱۴۴ بر ۱۲ و ۳۶ بخش‌پذیر است.

ب) مسکو پایتخت روسیه و یکی از شهرهای ایران است.

پ) $(۳<۵)\wedge(-۳<-۵)$

ت) $((۲^۳)^۲>۲^{۳^۲})\wedge(\sqrt{۰/۰۱}>\sqrt{۰/۰۴})$

۱۴. کدام‌یک از جمله‌های زیر گزارهٔ مرکب است؟ ارزش گزاره‌های مرکب را تعیین کنید. (مشابه تمرین ۳ صفحه ۱۴ کتاب درسی)

آ) $(۱۱>۳+۱)\vee(۳^۳=۸۱)$

ب) $(-۴<-۵)\wedge(۴>۵)$

پ) مجموع زوایای داخلی هر مثلث، ۱۸۰° است.

ت) $(\mathbb{W}\not\subseteq\mathbb{Z})\vee(\{۲\}\in\{۲,۳\})$

ث) $((۳^۲)^۲=۸۱)\wedge(۲^{۲^۲}=۱۶)$

ج) $۱+۲+۳+۴+۵=۱۵$

۱۵. جدول ارزش گزاره‌های زیر را تشکیل داده و نشان دهید گزاره‌های زیر همواره نادرست هستند.

آ) $p \wedge \sim p \equiv F$ ب) $\sim p \wedge (p \wedge q) \equiv F$ پ) $p \wedge \sim (p \vee q) \equiv F$

۱۶. با استفاده از جدول ارزش‌ها نشان دهید هم‌ارزی‌های منطقی زیر برقرار است. (مشابه تمرین ۶ صفحهٔ ۱۵ کتاب درسی)

آ) قوانین جابه‌جایی $p \vee q \equiv q \vee p$ ب) قوانین شرکت‌پذیری $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$

پ) قوانین توزیع‌پذیری $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

۱۷. با جدول ارزش‌ها نشان دهید که هم‌ارزی قانون دمورگان در منطق ریاضی برقرار است.

آ) $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ ب) $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

۱۸. مقادیر x و y را چنان تعیین کنید که داشته باشیم: (مشابه مثال صفحهٔ ۵ کتاب درسی)

آ) $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 0$ ب) $|2x-1| + |x+y| = 0$

پ) $x^2 + 2x + 1 + y^2 = 0$

بستهٔ سوم — ترکیب شرطی و ترکیب دوشرطی

صفحهٔ ۷ تا ۱۱ کتاب درسی

ترکیب شرطی

هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزارهٔ مرکب $(p \Rightarrow q)$ را که خوانده می‌شود «اگر p آن‌گاه q»، ترکیب شرطی دو گزاره می‌گوییم. در این ترکیب شرطی p را مقدم (فرض) و q را تالی (حکم) می‌نامیم.

ارزش گزارهٔ شرطی «$p \Rightarrow q$» وقتی نادرست است که ارزش p (مقدم) درست باشد و ارزش q (تالی) نادرست باشد. در بقیهٔ حالت‌ها ارزش «$p \Rightarrow q$» درست است.

به عبارتی می‌توان گفت هرگاه ارزش p (مقدم) نادرست باشد، ارزش گزارهٔ شرطی «$p \Rightarrow q$» درست است، در این حالت می‌گوییم ارزش گزاره $(p \Rightarrow q)$ به انتفای مقدم درست است. هم‌چنین می‌توان گفت هر ترکیب شرطی که ارزش q (تالی) آن درست باشد، مستقل از ارزش مقدم آن همواره درست است.

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

سؤال کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست است؟

۱) اگر ۴۰۰ بر ۱۰ بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه ۴۰۰ بر ۵ نیز بخش‌پذیر است.

۲) $(\frac{1}{4}) < (\frac{1}{2}) \Rightarrow (\frac{1}{4})^2 > (\frac{1}{2})^2$

۳) $\sqrt{0/5} > \sqrt{0/7} \Rightarrow 0/5 < 0/7$

۴) $2^5 = 64 \Rightarrow 2^6 = 128$

پاسخ ۱) در این ترکیب شرطی، مقدم درست است و تالی نیز درست است، لذا گزارهٔ شرطی نیز درست است.

۲) مقدم درست و تالی نادرست است، بنابراین گزارهٔ شرطی نادرست است.

۳) با توجه به این‌که مقدم نادرست و تالی درست است، بنا به انتفای مقدم، ترکیب شرطی درست است.

۴) با توجه به این‌که مقدم نادرست و تالی نادرست است، بنا به انتفای مقدم، ترکیب شرطی درست است.

صورت‌های مختلف بیان ترکیب شرطی $(p \Rightarrow q)$

می‌توانیم گزارهٔ شرطی $(p \Rightarrow q)$ را به صورت‌های زیر بیان کنیم:

۱ «اگر p آن‌گاه q»

۲ «p شرط کافی برای q است.» یا «شرط کافی برای q آن است که p.»

۳ «q شرط لازم برای p است.» یا «شرط لازم برای p آن است که q.»

سؤال گزارهٔ شرطی «اگر یک چهارضلعی مستطیل باشد، آن‌گاه دو قطرش مساویند.» را به دو شکل مختلف دیگر بنویسید.

پاسخ ۱) مستطیل بودن یک چهارضلعی شرط کافی برای مساوی بودن قطرهای آن است.

۲) مساوی بودن قطرهای یک چهارضلعی شرط لازم برای مستطیل بودن آن است.

نکته ❶ گزاره‌های $p \Rightarrow q$ و $\sim p \vee q$ هم‌ارز منطقی هستند. $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

❷ گزارهٔ « $q \Rightarrow p$ » عکس ترکیب شرطیِ « $p \Rightarrow q$ » و گزارهٔ « $\sim q \Rightarrow \sim p$ » عکس نقیض ترکیب شرطیِ « $p \Rightarrow q$ » است، به طوری‌که « $p \Rightarrow q$ » هم‌ارز منطقیِ « $\sim q \Rightarrow \sim p$ » است. $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$

❸ قانون ادخال فاصل: $(p \Rightarrow p \vee q) \equiv T$

یعنی به هر گزاره شرطی می‌توانیم با ترکیب فصلی هر تعداد گزاره را به تالی اضافه (ترکیب) کنیم.

❹ قانون حذف عاطف: $(p \wedge q \Rightarrow q) \equiv T$ یا $(p \wedge q \Rightarrow p) \equiv T$

یعنی از ترکیب عطفی دو یا چند گزاره می‌توانیم هرکدام را به دلخواه نتیجه بگیریم.

(اثبات در تمرین‌ها آمده است.)

سؤال **ثابت کنید اگر $a \in \mathbb{Z}$ و $a^۲$ عددی زوج باشد، آن‌گاه a نیز عددی زوج است.**

پاسخ به جای اثبات این حکم، عکس نقیض آن را ثابت می‌کنیم.

($a^۲$ عددی فرد است. $\Leftarrow$ a عددی فرد است.) $\equiv$ (a عددی زوج است. $\Leftarrow$ $a^۲$ عددی زوج است.)

اگر a عددی فرد باشد، آن را به‌صورت $a = ۲k + ۱ \,,\, (k \in \mathbb{Z})$ در نظر می‌گیریم و سپس طرفین تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$a^۲ = (۲k + ۱)^۲ = (۴k^۲ + ۴k) + ۱ = ۲(\underbrace{۲k^۲ + ۲k}_{k' \in \mathbb{Z}}) + ۱ = ۲k' + ۱$$

در نتیجه $a^۲$ نیز عددی فرد است. عکس نقیض گزارهٔ خواسته‌شده را ثابت کردیم، بنابراین گزارهٔ اصلی درست است.

ترکیب دوشرطی

هرگاه p و q گزاره باشند، گزارهٔ مرکب $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ را به‌صورت « $p \Leftrightarrow q$ » می‌نویسیم و آن را ترکیب دوشرطی p و q می‌نامیم. گزارهٔ « $p \Leftrightarrow q$ » را به صورت‌های زیر می‌خوانیم:

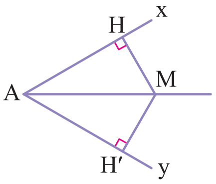
۱ «اگر p آن‌گاه q و برعکس»
۲ « p شرط لازم و کافی برای q است.»
۳ « q شرط لازم و کافی برای p است.»
۴ « p اگر و تنها اگر q » یا « q اگر و فقط اگر p »

به عنوان مثال گزاره‌های زیر نمونه‌ای از ترکیب دوشرطی گزاره‌ها هستند:

آ) $(x = ۴ \Rightarrow ۳x = ۱۲) \wedge (۳x = ۱۲ \Rightarrow x = ۴) \equiv (x = ۴ \Leftrightarrow ۳x = ۱۲)$

ب) شرط لازم و کافی برای آن که نقطه‌ای روی نیمساز زاویهٔ A قرار داشته باشد آن است که فاصلهٔ آن تا دو ضلع زاویه برابر باشد.

M روی نیمساز زاویهٔ A قرار دارد. $\Leftrightarrow MH = MH'$



جدول ارزش ترکیب دوشرطی

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن	ن
ن	د	د	ن	ن	ن
ن	ن	د	د	د	د

طبق تعریف هم‌ارزی $(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ برقرار است؛ زیرا در دو ستون آخر جدول، ارزش آن‌ها یکسان است، بنابراین اگر دو گزارهٔ p و q، هم‌ارزش باشند یعنی هر دو دارای ارزش درست یا هر دو دارای ارزش نادرست باشند، ارزش گزارهٔ دوشرطی درست است. در بقیهٔ حالت‌ها ارزش گزارهٔ دوشرطی نادرست است.

مثلاً ارزش گزارهٔ $(۱ + ۱ > ۱۲ \Leftrightarrow ۳ + ۱ > ۱۲ > ۳)$ درست است، زیرا هر دو گزاره نادرست هستند.

نکته نقیض گزارهٔ شرطی و دوشرطی به‌صورت زیر می‌باشد:

❶ $\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$
❷ $\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q \equiv p \Leftrightarrow \sim q$

(اثبات در تمرین‌ها آمده است.)

سؤال نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.

۱ اگر a عددی منفی باشد، آن‌گاه مربع آن مثبت است.

۲ یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است اگر و تنها اگر قطرهایش منصف یکدیگر باشند.

پاسخ ۱ نقیض گزاره برابر است با «a عددی منفی است و مربع a مثبت نیست.»

۲ نقیض گزاره برابر است با: «یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع نیست اگر و تنها اگر قطرهایش منصف یکدیگر باشند.»

یا «یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است اگر و تنها اگر قطرهایش منصف یکدیگر نباشند.»

بسته ۳ پرسش‌های تشریحی — ترکیب شرطی و ترکیب دوشرطی

۱۹. **جاهای خالی را با عبارت‌های «لازم»، «کافی» یا «لازم و کافی» پرکنید.**

آ شرط .... برای آن‌که نقطه‌ای از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشد آن است که روی عمودمنصف آن پاره‌خط باشد.

ب شرط .... برای آن‌که $ab = 0$ باشد آن است که $a = 0$ و $b = 0$، $(a, b \in \mathbb{R})$

پ شرط .... برای آن‌که عددی مثبت باشد آن است که مربع آن عدد مثبت باشد.

ت شرط .... برای آن‌که $ab = 0$ باشد آن است که $a = 0$ یا $b = 0$، $(a, b \in \mathbb{R})$

ث شرط .... برای آن‌که عددی زوج باشد آن است که مربع آن زوج باشد.

۲۰. **قضیهٔ شرطی «اگر a و b دو عددگویا باشند، آن‌گاه $a + b$ گویا است.» را در نظر بگیرید.** (دی ۹۳)

آ عکس قضیهٔ شرطی را بنویسید.

ب آیا عکس آن نیز یک قضیهٔ شرطی است؟ چرا؟

۲۱. **ارزش گزاره‌های شرطی و دوشرطی زیر را مشخص کنید، سپس نقیض هر یک را بنویسید.**

آ اگر a عددی فرد باشد، آن‌گاه a^2 فرد است.

ب π عددی گویا است اگر و تنها اگر $\pi = ۳/۱۴$ باشد.

پ اگر دو مثلث دارای مساحت‌های برابر باشند، آن‌گاه دو مثلث همنهشت هستند.

ت اگر دو مثلث همنهشت باشند، آن‌گاه دو مثلث دارای مساحت‌های برابر می‌باشند.

ث اگر یک چهارضلعی مربع باشد، آن‌گاه قطرهای آن با هم برابرند.

ج $(۲^۲ = ۴) \Leftrightarrow (۲^۰ = ۲)$

چ اگر a بر b بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه a^n بر b^n بخش‌پذیر است.

۲۲. **با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها، قانون ادخال فاصل و قانون حذف عاطف را نشان دهید.**

۲۳. **جدول‌های ارزش گزاره‌های زیر را تشکیل داده و نشان دهید این گزاره‌ها همواره درست هستند.**

آ $p \Rightarrow p \equiv T$

ب $(p \vee \sim q) \vee (\sim p \vee q) \equiv T$

پ $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \vee p)] \Leftrightarrow q \equiv T$

۲۴. **با استفاده از جدول ارزش‌ها نشان دهید:** (تمرین ۵ صفحه ۱۵ کتاب درسی)

آ $p \vee F \equiv p$

ب $p \vee (q \wedge p) \equiv p$

پ $\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q$

ت $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$

۲۵. **با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها نشان دهید:** (مشابه تمرین ۶ صفحه ۱۵ کتاب درسی)

آ $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

ب $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$

پ $\sim (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

ت $\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q \equiv p \Leftrightarrow \sim q$

ث $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r) \equiv (p \vee q) \Rightarrow r$

ج $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv q \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

۲۶. **نشان دهید اگر n^2 عددی فرد باشد، آن‌گاه n نیز فرد است.** (مشابه شهریور ۹۲)

۲۷. **ثابت کنید هرگاه n عدد صحیح و n^2 مضرب ۵ باشد، آن‌گاه n نیز مضرب ۵ است.** (مشابه تمرین ۷ صفحه ۱۵ کتاب درسی)

بسته چهارم

سورها

صفحهٔ ۱۱ تا ۱۵ کتاب درسی

سور

عبارت‌های «به ازای هر» و «به ازای بعضی مقادیر» به سور معروف هستند.

این عبارت‌ها می‌توانند قبل از گزاره‌نماها قرار گیرند و به این وسیله گزاره‌هایی با ارزش درست یا نادرست ایجاد کنند.

برای بیان عبارت‌ها با استفاده از نمادهای ریاضی به جای «به ازای هر» یا «به ازای جمیع مقادیر» از نماد $\forall$ (از حرف اول کلمهٔ All گرفته شده است.) و به جای «وجود دارد» یا «به ازای بعضی مقادیر» از نماد $\exists$ (از حرف اول کلمهٔ Exist گرفته شده است.) استفاده می‌کنیم. نماد $\forall$ **سور عمومی** و نماد $\exists$ **سور وجودی** نامیده می‌شود.

گزاره‌های با سور عمومی

گزاره‌هایی مانند «هر عدد طبیعی، یک عدد مثبت است.» و «هر مستطیلی یک متوازی‌الاضلاع است.» که خاصیتی را به تمام اعضای یک مجموعه نسبت می‌دهند، سور عمومی هستند.

اگر $P(x)$ را گزاره‌نمایی فرض کنیم که خاصیتی را برای متغیر x بیان می‌کند، در این صورت گزارهٔ «هر x ای خاصیت P را دارا می‌باشد.» را به‌صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$\forall x : P(x)$$

گزاره‌های با سور عمومی وقتی درست می‌باشند که مجموعه جواب آن‌ها با دامنهٔ متغیر آن‌ها یکسان باشد. به عبارت دیگر هیچ مثال نقضی نداشته باشند.

سؤال **گزاره‌های زیر را به زبان ریاضی بیان کرده و ارزش آن‌ها را تعیین کنید.**

۱ مربع هر عدد حقیقی، نامنفی است. **۲ نصف هر عدد صحیح از خود آن عدد کوچک‌تر است.**

پاسخ ۱ این گزاره درست است.

$$\forall x \in \mathbb{R} : x^{2} \geq 0$$

زیرا گزاره‌نمایی شامل متغیر x که با سور عمومی بیان می‌شود، وقتی به یک گزارهٔ درست تبدیل می‌شود که هرعضو از دامنهٔ متغیر در گزاره‌نما صدق کند و هیچ مثال نقضی نداشته باشد و این عبارت این شرایط را دارد و درست می‌باشد.

۲
$$\forall x \in \mathbb{Z} : \frac{x}{2} < x$$

این گزاره نادرست است، زیرا $x = -1$ یک مثال نقض برای این گزاره محسوب می‌شود. $(\frac{-1}{2} \not< -1)$

یادآوری مجموعهٔ اعداد زوج را با E، مجموعهٔ اعداد فرد را با O و مجموعهٔ اعداد اول را با P نمایش می‌دهیم.

سؤال **عبارت روبه‌رو را با زبان طبیعی بنویسید و ارزش آن را مشخص کنید.** $\forall a \in O : a = 2k+1 \, , (k \in \mathbb{Z})$

پاسخ برای هر عدد صحیح فرد داریم: $a = 2k+1 \, , (k \in \mathbb{Z})$

ارزش این گزاره درست است، زیرا اگر به جای k اعداد صحیح را قرار دهیم، تمام اعداد فرد به‌دست می‌آیند و هیچ مثال نقضی نیز ندارد.

گزاره‌های با سور وجودی

گزاره‌ای با سور وجودی، گزاره‌ای است که خاصیتی را حداقل به یک عضو از مجموعه نسبت دهد.

گزارهٔ « $\exists x : P(x)$ » به این معنی است که حداقل یک x وجود دارد که خاصیت P را دارا می‌باشد. به عنوان مثال:

«بعضی از اعداد اول، زوج هستند.» و «بعضی از اعداد با توان زوج، فرد هستند.» گزاره‌هایی با سور وجودی می‌باشند.

گزاره‌های با سور وجودی زمانی درست هستند که مجموعه جواب آن‌ها تهی نباشد.

سؤال **گزاره‌های زیر را به زبان ریاضی بیان کرده و ارزش آن‌ها را تعیین کنید.**

۱ معکوس بعضی از اعداد صحیح، یک عدد صحیح است.

۲ جذر بعضی از اعداد طبیعی از خود عدد طبیعی بزرگ‌تر است.

پاسخ ۱ این گزاره درست است، زیرا به ازای $x = 1$ گزاره درست است، پس حداقل یک عضو وجود دارد که به ازای آن، این گزاره‌نما به گزاره‌ای با ارزشِ درست تبدیل می‌شود.

$$\exists x \in \mathbb{Z} : \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$$

۲ این گزاره نادرست است، زیرا هیچ عضوی از اعداد طبیعی وجود ندارد که به ازای آن، این گزاره‌نما به یک گزارهٔ درست تبدیل شود.

$$\exists x \in \mathbb{N} : \sqrt{x} > x$$

نقیض گزاره‌های با سور عمومی

گزارهٔ $\forall x : P(x)$ وقتی درست است که تمام اعضای دامنه، خاصیت $P(x)$ را داشته باشند. بنابراین می‌توان گفت این گزاره وقتی نادرست است که حداقل یک عضو پیدا شود که خاصیت $P(x)$ را نداشته باشد. $\sim(\forall x : P(x)) \equiv \exists x : \sim P(x)$

سؤال **ارزش و نقیض گزارهٔ مقابل را به‌دست آورید.** $\forall x \in \mathbb{N} : x + ۳ \geq ۴$

پاسخ ارزش این گزاره درست است، زیرا به ازای تمام اعداد طبیعی، نامساوی ارائه شده برقرار است.

$$\sim(\forall x \in \mathbb{N} : x+۳ \geq ۴) \equiv (\exists x \in \mathbb{N} : x+۳ \not\geq ۴) \equiv (\exists x \in \mathbb{N} : x+۳ < ۴)$$

نقیض گزاره‌های با سور وجودی

گزارهٔ $\exists x : P(x)$ وقتی درست است که مجموعه جوابش ناتهی باشد. پس این گزاره وقتی نادرست است که مجموعه جوابش تهی باشد، یعنی هیچ عضوی از دامنه در رابطهٔ $P(x)$ صدق نکند. $\sim(\exists x : P(x)) \equiv \forall x : \sim P(x)$

سؤال **نقیض گزارهٔ «بعضی از اعداد اول زوج هستند.» را بیان کنید.**

پاسخ نقیض این گزاره به‌صورت «هر عدد اولی فرد است.» یا «تمام اعداد اول فردند.» می‌باشد.

سؤال **ارزش و نقیض گزارهٔ مقابل را به‌دست آورید.** $\exists x \in \mathbb{R} : x^۲ + x^۴ = ۰$

پاسخ ارزش این گزاره درست است، زیرا به ازای $x = ۰$ معادله برقرار است، پس مجموعه جواب معادلهٔ $x^۲ + x^۴ = ۰$ ناتهی است.

$$\sim(\exists x \in \mathbb{R} : x^۲ + x^۴ = ۰) \equiv \forall x \in \mathbb{R} : x^۲ + x^۴ \neq ۰$$

بسته ۴ پرسش‌های تشریحی — سورها

۲۸. با ذکر دلیل، درستی یا نادرستی گزاره‌های سوری زیر را مشخص کنید.

آ) در آمار، هر متغیر گسسته یک متغیر کمی است.

ب) در آمار، هر متغیر کمی یک متغیر گسسته است.

پ) در آمار، بعضی از متغیرهای گسسته یک متغیر کیفی هستند.

ت) در آمار، بعضی از متغیرهای کمی یک متغیر گسسته هستند.

۲۹. ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید. (مشابه کاردرکلاس صفحه ۱۲ کتاب درسی)

آ) $\forall x \in \mathbb{N} : x(x+۱) = ۲k, (k \in \mathbb{N})$

ب) $\forall x \in \mathbb{R} : \sin x + \cos x = ۱$

پ) $\exists x \in \mathbb{Z} : x^۲ + ۳x = ۰$

ت) $\exists x \in \mathbb{R} : x^۲ + ۴ = ۰$

ث) $\forall x \in P : x = ۲k+۱ , (k \in \mathbb{N})$ (P اعداد اول است.)

ج) $\exists x \in \mathbb{Z} : x^۵ + ۱ = ۰$

۳۰. هرگاه $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -۲ \leq x < ۲\}$ دامنهٔ متغیر باشد، ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید. (مشابه تمرین ۹ صفحه ۱۵ کتاب درسی)

آ) $\forall x \in A : x + ۳ \leq ۴$

ب) $\forall x \in A : ۲x + ۱ > -۳$

پ) $\exists x \in A : \sqrt{x^۲ + ۳} = ۲$

ت) $\exists x \in A : \frac{x-۱}{۲} \geq ۱$

۳۱. گزاره‌های زیر را به زبان ریاضی بیان کرده و ارزش آن‌ها را تعیین کنید. (مشابه تمرین ۸ صفحه ۱۵ کتاب درسی)

آ) مربع هر عدد حقیقی، مثبت است.

ب) مجذور هر عدد حقیقی منفی، منفی است.

پ) هر عدد صحیحی، گویا است.

ت) مجذور بعضی از اعداد صحیح با خود آن عدد صحیح مساوی است.

ث) وجود دارد عدد طبیعی مانند a به طوری‌که $-۲a + ۱ > ۰$

ج) بعضی از اعداد حقیقی، گویا نیستند.

۳۲. گزاره‌های زیر را به زبان طبیعی بنویسید و ارزش آن‌ها را مشخص کنید.

آ) $\forall x \in \mathbb{N} : (x)(x+۱)(x+۲) = ۳k , (k \in \mathbb{N})$

ب) $\forall y \in P : ۲y + ۱ > ۵$ (P اعداد اول است.)

پ) $\exists x \in \mathbb{N} : n^۲ + n < ۳$

۳۳. ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید و نقیض هر یک را بنویسید. (مشابه تمرین ۱۰ صفحهٔ ۱۵ کتاب درسی)

آ) $\forall x \in \mathbb{N} : \frac{x+1}{x} \geq 2$

ب) $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$

پ) $\forall x \in \mathbb{Z} : \frac{4-x^2}{2+x} = 2 - x$

ت) $\exists x \in \mathbb{R} : \sqrt{-x} \in \mathbb{Z}$

ث) $\exists n \in \mathbb{N} : 2^n > 1000$

ج) $\exists y \in \mathbb{R} : y < 0 \wedge y^2 \leq 1$

بسته پنجم
مجموعه و زیرمجموعه
صفحهٔ ۱۶ تا ۱۷ کتاب درسی

مجموعه

■ **تعریف مجموعه:** دسته‌ای از اشیاء کاملاً مشخص و دوبه‌دو متمایز را مجموعه می‌گوییم.

■ **تعریف اعضای مجموعه:** عناصری که یک مجموعه را تشکیل می‌دهند، عضوهای آن مجموعه می‌نامیم.

اگر a عضوی متعلق به مجموعهٔ A باشد آن را به‌صورت $a \in A$ و اگر b به مجموعهٔ A تعلق نداشته باشد، آن را به‌صورت $b \notin A$ نشان می‌دهیم.

سؤال **اگر $A = \{a, \{a\}, \{b\}, \{b, c\}\}$ ، کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست است؟**

۱) $a \in A$ ۲) $b \in A$ ۳) $\{b\} \in A$

۴) $c \notin A$ ۵) $\{c\} \in A$ ۶) $\{b, c\} \in A$

پاسخ مجموعهٔ A دارای چهار عضو a ، $\{a\}$ ، $\{b\}$ و $\{b, c\}$ است که متعلق به این مجموعه می‌باشند. پس قسمت‌های (۱)، (۳)، (۴) و (۶) درست و قسمت‌های (۲) و (۵) نادرست هستند.

■ **تعریف مجموعهٔ تهی:** مجموعه‌ای که هیچ عضوی نداشته باشد، مجموعهٔ تهی نامیده می‌شود و با نماد $\varnothing$ یا $\{\}$ نشان داده می‌شود.

به عنوان مثال مجموعهٔ اعداد طبیعی بین ۵ و ۶، یک مجموعهٔ تهی (بدون عضو) می‌باشد.

■ **تعریف مجموعهٔ مرجع:** در هر بحث معین، از اعضایی صحبت می‌کنیم که این اعضا متعلق به یک مجموعهٔ بزرگ‌تر به نام مجموعهٔ مرجع یا جهانی می‌باشند. مجموعهٔ مرجع را معمولاً با U یا M نشان می‌دهیم.

به عنوان مثال اگر A ، مجموعهٔ اعداد اول باشد، آن‌گاه می‌توانیم مجموعهٔ مرجع آن را مجموعهٔ اعداد طبیعی فرض کنیم.

زیرمجموعه

■ **تعریف زیرمجموعه:** مجموعهٔ A را زیرمجموعهٔ B می‌گوییم و می‌نویسیم $A \subseteq B$ ، هرگاه هرعضو A ، عضو B نیز باشد. چنان‌چه عضوی در A وجود داشته باشد، به طوری که آن عضو در مجموعهٔ B نباشد، در این صورت A زیرمجموعهٔ B نیست و می‌نویسیم $A \nsubseteq B$

اگر $A \subseteq B$ ولی $A \neq B$ ، آن‌گاه A زیرمجموعهٔ محض یا سرهٔ B نامیده می‌شود و آن را به‌صورت $A \subset B$ نشان می‌دهیم.

! نکته هر مجموعه‌ای، زیرمجموعهٔ خودش است و تهی زیرمجموعهٔ هر مجموعه‌ای است.

سؤال **مجموعهٔ $A = \{\varnothing, \{1\}, \{1, \varnothing\}\}$ را در نظر بگیرید و همهٔ زیرمجموعه‌های آن را در یک مجموعه بنویسید.**

پاسخ $P(A) = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{1\}\}, \{\{1, \varnothing\}\}, \{\varnothing, \{1\}\}, \{\varnothing, \{1, \varnothing\}\}, \{\{1\}, \{1, \varnothing\}\}, A\}$

! نکته مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های A ، مجموعهٔ توانی A نامیده می‌شود و آن را با $P(A)$ نمایش می‌دهیم. همانند مثال بالا که تمام زیرمجموعه‌های مجموعهٔ A را در یک مجموعه به نام $P(A)$ نمایش دادیم. اگر A، n عضو داشته باشد، در این صورت $P(A)$ ، 2^n عضو دارد.

تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه

فرض کنید A یک مجموعهٔ n عضوی باشد، تعداد زیرمجموعه‌های A برابر 2^n است. به‌عنوان مثال یک مجموعهٔ ۵ عضوی دارای $2^5 = 32$ زیرمجموعه می‌باشد.

سؤال **اگر سه عضو به مجموعهٔ متناهی A اضافه کنیم، به تعداد زیرمجموعه‌های آن ۵۶ واحد اضافه می‌شود. مشخص کنید که مجموعهٔ A چند عضو دارد.**

پاسخ فرض کنیم مجموعهٔ متناهی A دارای n عضو باشد، پس دارای 2^n زیرمجموعه است. اگر سه عضو به اعضای A اضافه شود، ۵۶ واحد به تعداد زیرمجموعه‌های آن اضافه می‌شود. پس:

$$2^n + 56 = 2^{n+3} \Rightarrow 2^{n+3} - 2^n = 56 \Rightarrow 2^n \times 2^3 - 2^n = 56$$

$$\xrightarrow{\text{فاکتور}} 2^n(2^3 - 1) = 56 \Rightarrow 2^n(8-1) = 56 \Rightarrow 2^n = \frac{56}{7} = 8 = 2^3 \Rightarrow n = 3$$

در نتیجه مجموعهٔ A ، سه عضو دارد.

بسته ۵ پرسش‌های تشریحی

مجموعه و زیرمجموعه

۳۴. از گزاره‌های زیر کدام‌یک درست و کدام‌یک نادرست است؟

آ) $\{۲,۵\} \in \{۲,۵,\{۷\}\}$ ب) $\{۴\} \in \{۱,۲,\{۴\}\}$ پ) $\{a,b\} \subseteq \{\{a,b\}\}$ ت) $\{۱,۲\} \subseteq \{۲,۱\}$

ث) $\{\varnothing\} \notin \{\varnothing,\{\varnothing\}\}$ ج) $\{\varnothing\} \not\subseteq \{\varnothing,\{۳,\varnothing\}\}$ چ) $\varnothing \subseteq \{۱,۲\}$

۳۵. مجموعه‌های زیر را که شامل شکل‌های هندسی در صفحه هستند، در نظر بگیرید:

$C = \{x \mid$ یک مثلث متساوی‌الساقین است. $x\}$ $A = \{x \mid$ یک سه‌ضلعی است. $x\}$

$D = \{x \mid$ یک مثلث متساوی‌الاضلاع است. $x\}$ $B = \{x \mid$ یک مثلث قائم‌الزاویه است. $x\}$

درستی یا نادرستی هر یک از عبارت‌های زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

آ) $D \subseteq C$ ب) $A \subseteq B$ پ) $C \subseteq A$

ت) $D \not\subseteq B$ ث) $B \subseteq C$

۳۶. عضوهای هر یک از مجموعه‌های زیر را بنویسید و سپس درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid |x| \le ۳\}$, $B = \{y \in \mathbb{Z} \mid y^۲ - ۳y + ۲ = ۰\}$, $C = \{m \in \mathbb{R} \mid m^۳ - m = ۰\}$

$D = \{k \in \mathbb{Z} \mid -۲ < k \le ۲\}$, $E = \{a \in \mathbb{N} \mid a^۲ + ۲a = ۰\}$

آ) $B \subseteq A$ ب) $B \in A$ پ) $E \subseteq A$ ت) $B \cup C \subseteq D$

ث) $A \cap C \not\subseteq B$ ج) $D - B \not\subseteq C$ چ) $B \cup E \subseteq B$

۳۷. درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

آ) $\varnothing = \{\varnothing\}$ ب) $\varnothing \subseteq \{\varnothing\}$

پ) $\varnothing \notin \{\varnothing\}$ ت) $\{\varnothing, \{\varnothing\}\} \in \{\varnothing, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing\}\}$

۳۸. فرض کنید $A = \{۱,۲,۳,...,۱۱,۱۲\}$ ، $B = \{۱,۳,۵,۷,۹,۱۱\}$ ، $C = \{۲,۴,۶,۸,۱۰,۱۲\}$ ، $D = \{۵,۶,۷,۸\}$ و $E = \{۵,۷\}$

در هر یک از حالت‌های زیر مشخص کنید، X می‌تواند کدام‌یک از این مجموعه‌ها باشد؟

آ) X و C عضو مشترکی ندارند. ب) $X \subseteq A$ ، ولی $X \not\subseteq B$ پ) $X \subseteq D$ ، ولی $X \not\subseteq A$ ت) $X \subseteq B$ ، ولی $X \not\subseteq C$

۳۹. برای هر قسمت، یک مثال از مجموعه‌های دلخواه A ، B و C بیاورید که برای آن‌ها حکم‌های زیر درست باشند.

آ) $A \in B\,,\, B \in C\,,\, A \subseteq C$ ب) $A \in B\,,\, B \notin C\,,\, A \in C$

پ) $A \in B\,,\, A \in C\,,\, B \in C$ ت) $A \in B\,,\, A \subseteq B\,,\, B \subseteq C$

۴۰. اگر دو عضو به مجموعهٔ متناهی A اضافه کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های آن ۱۹۲ واحد اضافه می‌شود، مشخص کنید که مجموعهٔ A چند عضو دارد؟

۴۱. اگر سه عضو از مجموعهٔ متناهی A کم کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های آن ۸۹۶ واحد کم می‌شود، مشخص کنید که مجموعهٔ A چند عضو و چند زیرمجموعه دارد؟ (مشابه تمرین ۲ صفحهٔ ۳۳ کتاب درسی)

۴۲. مجموع تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ $(n+۲)$ عضوی و یک مجموعهٔ $۲n$ عضوی برابر ۹۶ است. عدد طبیعی n را به‌دست آورید.

بسته ششم

تعریف زیرمجموعه به کمک نمادهای ریاضی

صفحهٔ ۱۷ تا ۲۰ کتاب درسی

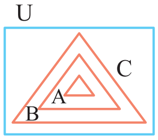
زیرمجموعه را در درسنامهٔ قبل تعریف کردیم. حال با استفاده از نمادهای ریاضی می‌توانیم تعریف‌های $A \subseteq B$ و $A \not\subseteq B$ را به‌صورت زیر بنویسیم:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B)$$
$$A \not\subseteq B \Leftrightarrow (\exists x \in A \wedge x \notin B)$$

روش عضوگیری دلخواه

هرگاه بخواهیم ثابت کنیم $A \subseteq B$ و اعضای مجموعه‌های A و B مشخص نباشند، کافی است عضوی دلخواه از A مانند x فرض کرده، سپس با استفاده از فرض‌های داده‌شده نشان دهیم که x در B وجود دارد. از آن‌جا که x دلخواه بوده است، در واقع هر عضو A در B است، بنابراین با توجه به تعریف زیرمجموعه، ثابت کرده‌ایم $A \subseteq B$

اثبات چند قضیهٔ مهم در مجموعه‌ها با روش عضوگیری دلخواه



قضیه ۱ فرض کنید A ، B و C سه مجموعه با مجموعهٔ مرجع U باشند، به طوری‌که $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$ ، ثابت کنید $A \subseteq C$

اثبات برای اثبات $A \subseteq C$ باید ثابت کنیم که $\forall x \in A \Rightarrow x \in C$

برای این منظور از فرض‌های قضیه یعنی $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$ استفاده می‌کنیم:

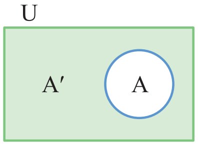
$$\forall x \in A \xrightarrow{A \subseteq B} x \in B \xrightarrow{B \subseteq C} x \in C$$

در نتیجه داریم:

$$(\forall x \in A \Rightarrow x \in C) \Rightarrow A \subseteq C$$

متمم یک مجموعه به کمک نمادهای ریاضی

تعریف فرض کنیم A مجموعه‌ای با مجموعهٔ مرجع U باشد، متمم مجموعهٔ A برابر با مجموعهٔ اعضایی از U است که متعلق به مجموعهٔ A نباشند و آن را با A' نمایش می‌دهیم.



$$A' = \{x \in U \mid x \notin A\}$$

در نتیجه اگر $x \in A$ ، آن‌گاه $x \notin A'$ یا اگر $x \in A'$ ، آن‌گاه $x \notin A$

قضیه ۲ فرض کنید A و B دو مجموعه با مجموعهٔ مرجع U باشند، ثابت کنید اگر $A \subseteq B$ ، آن‌گاه $B' \subseteq A'$

اثبات برای این‌که ثابت کنیم $B' \subseteq A'$ ، باید نشان دهیم که $\forall x \in B' \Rightarrow x \in A'$ ، بنابراین داریم:

$$\forall x \in B' \Rightarrow x \notin B \xrightarrow{A \subseteq B} x \notin A \Rightarrow x \in A'$$

در نتیجه داریم:

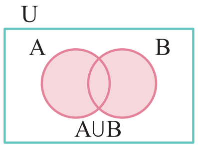
$$(\forall x \in B' \Rightarrow x \in A') \Rightarrow B' \subseteq A'$$

قضیه ۳ برای هر مجموعهٔ دلخواه مانند A با مجموعهٔ مرجع U ثابت کنید: $\varnothing \subseteq A$

اثبات برای اثبات $\varnothing \subseteq A$ باید نشان دهیم که ارزش گزارهٔ شرطی $(\forall x \in \varnothing \Rightarrow x \in A)$ همواره درست است. چون در این گزارهٔ شرطی ارزش مقدم یعنی $x \in \varnothing$ نادرست است، پس به انتفای مقدم ارزش گزارهٔ شرطی درست است و در نتیجه $\varnothing \subseteq A$ ، یعنی مجموعهٔ تهی زیرمجموعهٔ هر مجموعه‌ای است.

اجتماع دو مجموعه

تعریف اجتماع دو مجموعهٔ A و B که با $A \cup B$ نمایش داده می‌شود، مجموعه‌ای است که عضوهای آن به مجموعه‌های A یا B یا به هر دو تعلق داشته باشند.



$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

از تعریف فوق نتیجه می‌شود که:

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B)$$

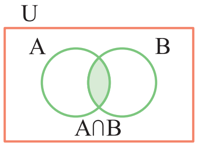
سؤال به ازای دو مجموعهٔ دلخواه A و B ثابت کنید: $A \subseteq A \cup B$

پاسخ برای هر عضو دلخواه از مجموعهٔ A داریم:

$$x \in A \xrightarrow{\text{ادخال فاصل}} x \in A \vee x \in B \Rightarrow x \in A \cup B \Rightarrow A \subseteq A \cup B$$

اشتراک دو مجموعه

تعریف اشتراک دو مجموعهٔ A و B که آن را به‌صورت $A \cap B$ نشان می‌دهیم، مجموعه‌ای است که عضوهای آن هم متعلق به A و هم متعلق به B باشند.



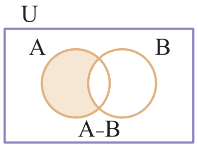
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

از تعریف فوق نتیجه می‌شود که:

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)$$

توجه همواره داریم $A \cap B \subseteq A$ و $A \cap B \subseteq B$

تفاضل دو مجموعه



تعریف تفاضل مجموعهٔ B از مجموعهٔ A که با $A-B$ نمایش داده می‌شود، مجموعه‌ای شامل اعضای A است که متعلق به B نباشد.

$$A-B=\{x \mid x\in A \wedge x\notin B\}=\{x \mid x\in A \wedge x\in B'\}=A\bigcap B'$$

از تعریف فوق نتیجه می‌شود که:

$$x\in A-B \Leftrightarrow (x\in A \wedge x\notin B) \Leftrightarrow (x\in A \wedge x\in B') \Leftrightarrow x\in A\bigcap B'$$

سؤال **ثابت کنید برای مجموعه‌های A و B با مجموعهٔ مرجع U داریم $A-B\subseteq A$** **تمرین ۸ صفحه ۲۵ کتاب درسی**

پاسخ به ازای هر عضو دلخواه از مجموعهٔ $A-B$ داریم:

$$(x\in A-B \Rightarrow x\in A \wedge x\notin B \xrightarrow{\text{حذف عاطف}} x\in A) \Rightarrow A-B\subseteq A$$

دو مجموعهٔ مساوی

فرض کنیم A و B دو مجموعه با مجموعهٔ مرجع U باشند، به طوری‌که هر عضو A، عضوی از B و هر عضو B عضوی از A باشد، یعنی $A\subseteq B$ و $B\subseteq A$، در این صورت A با B مساوی است و می‌نویسیم $A=B$. یا به عبارتی:

$$A=B \Leftrightarrow [(A\subseteq B)\wedge(B\subseteq A)]$$

اگر دو مجموعهٔ A و B برابر نباشند، می‌نویسیم:

$$A\neq B \Leftrightarrow [(A\nsubseteq B)\vee(B\nsubseteq A)]$$

نکته با توجه به تعریف دو مجموعهٔ مساوی، تغییر ترتیب عضوهای یک مجموعه یا تکرار عضوهای یک مجموعه، آن مجموعه را تغییر نمی‌دهد. به عنوان مثال دو مجموعهٔ $A=\{a,b,c\}$ و $B=\{c,b,b,a,a,a\}$ مساوی‌اند.

سؤال **اگر $A=\{۳,۳x+y,۲\}$ و $B=\{۵,۴x-y,۳\}$ و $A=B$، در این صورت مقادیر x و y را به‌دست آورید.**

پاسخ دو مجموعهٔ A و B با یکدیگر برابرند، پس باید سه عضو مجموعهٔ A با سه عضو مجموعهٔ B برابر باشند، عضو ۳ که در دو مجموعه وجود دارد، پس دو عضو دیگر را مساوی قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} ۳x+\cancel{y}=۵ \\ ۴x-\cancel{y}=۲ \end{cases} \Rightarrow ۷x=۷ \Rightarrow x=۱ \Rightarrow ۳x+y=۵ \xrightarrow{x=۱} ۳(۱)+y=۵ \Rightarrow y=۵-۳ \Rightarrow y=۲$$

بستهٔ ۶ پرسش‌های تشریحی

تعریف زیرمجموعه به کمک نمادهای ریاضی

۴۳. **به ازای چه مقادیری از a و b دو مجموعهٔ مقابل برابر هستند؟** $\{a,a^۲\}$ ، $\{۱,b,b^۲\}$

۴۴. **کدام‌یک از مجموعه‌های زیر با هم مساوی‌اند؟** (تمرین ۱ صفحهٔ ۳۳ کتاب درسی)

$C=\{y\in\mathbb{Z} \mid y^۲\leq ۲y\}$ $B=\{x\in\mathbb{Z} \mid x^۳=x\}$ $A=\{m\in\mathbb{Z} \mid |m|<۲\}$

$E=\{m\in\mathbb{Z} \mid m^۳+۲m=۳m^۲\}$ $D=\{m\in\mathbb{Z} \mid m^۲\leq ۱\}$

۴۵. **فرض کنیم A و B دو مجموعه با مجموعهٔ مرجع U باشند، ثابت کنید:** $B\subseteq A\bigcup B$

۴۶. **فرض کنیم A و B دو مجموعه با مجموعهٔ مرجع U باشند، ثابت کنید که اگر $A\subseteq B$، آن‌گاه $A-B=\varnothing$**

۴۷. **فرض کنیم A، B و C سه مجموعه با مجموعهٔ مرجع U باشند، ثابت کنید اگر $A\subseteq C$ و $B\subseteq C$، آن‌گاه $(A\bigcup B)\subseteq C$**

۴۸. **فرض کنیم A، B و C سه مجموعه با مجموعهٔ مرجع U باشند، ثابت کنید اگر $A\subseteq B$، آن‌گاه:** (تمرین ۵ صفحهٔ ۳۳ کتاب درسی)

آ) $A\bigcup C\subseteq B\bigcup C$ ب) $A\bigcap C\subseteq B\bigcap C$

فصل ۱ آشنایی با مبانی ریاضیات

۱ الف) نمادین - مطالعه ساختار

ب) خبری - راست (درست) - دروغ (نادرست)

پ) متغیر - گزاره - گزاره‌نما

---

۲ الف) گزاره است و ارزش آن نادرست است.

ب) گزاره است و ارزش آن درست است.

پ) گزاره نیست.

ت) گزاره نیست.

ث) گزاره است. $۳^۹+۸=(۳^۳)^۳+۲^۳=(۳^۳+۲)(۳^۶-۲\times۳^۳+۴)$ این عبارت اتحاد چاق و لاغر است و عدد اوّل نیست، ارزش نادرست.

ج) گزاره نیست.

چ) $۲^۳-۱=۸-۱=۷<۹$ گزاره است و ارزش آن درست است.

ح) گزاره است و ارزش آن نادرست است.

خ) گزاره است و ارزش آن درست است.

د) گزاره است و ارزش آن نادرست است.

ذ) گزاره است. حدس گلدباخ است و ارزش آن مشخص نیست.

ر) گزاره است. ارزش درست.

---

۳ الف) $۱۸=۳\boxed{+}۱۵$، چون تساوی است فقط با قرار دادن علامت جمع ارزش گزاره درست می‌شود.

ب) $۶(\boxed{۹}-۵)=۲۴$، چون تساوی است با قرار دادن عدد ۹ معادلهٔ $۶\times۴=۲۴$ برقرار است و ارزش گزاره درست می‌شود.

پ) $\frac{\boxed{۰}}{\sqrt{۳}}=۰$، فقط صفر تقسیم بر هر عددی برابر صفر می‌شود، پس با قرار دادن صفر ارزش گزاره درست می‌شود.

ت) $۵\boxed{\in}\{۳,۴,۵\}$، چون ۵ عضوی از مجموعه است، پس از نماد عضویت استفاده می‌کنیم، تا ارزش گزاره درست باشد.

ث) $۷+\boxed{\frac{۱}{۲}}\notin\mathbb{N}$، به ازای هر عدد غیرصحیح و اعداد صحیح کوچک‌تر از (۶-) این رابطه برقرار می‌شود و ارزش گزاره درست خواهد شد.

ج) $\frac{۶\times۴}{۳}\boxed{<}۹\times۲$، چون $\frac{۶\times۴}{۳}=۸\boxed{<}۹\times۲=۱۸$، از علامت (>) برای ارزش درست استفاده می‌کنیم.

چ) $\frac{۹\times۴}{۳}\boxed{=}۶\times۲$، در این گزاره حاصل دو طرف برابر ۱۲ می‌باشد؛ که از نماد تساوی برای ارزش درست استفاده می‌کنیم.

ح) $۱۷\div\boxed{۱۷}\in\mathbb{Z}$، می‌توانیم از عددهای ±۱۷ یا ±۱ نیز استفاده کنیم تا حاصل یک عدد صحیح باشد و ارزش گزاره درست شود.

---

۴ الف)

$$p:(\sqrt{۱۰}<۱۰)\Rightarrow\sim p:\sim(\sqrt{۱۰}<۱۰)\equiv(\sqrt{۱۰}\not<۱۰)\equiv(\sqrt{۱۰}\ge۱۰)$$

ب)

$$p:(\frac{۱۵}{۳}\le۳)\Rightarrow\sim p:\sim(\frac{۱۵}{۳}\le۳)\equiv(\frac{۱۵}{۳}\not\le۳)\equiv(\frac{۱۵}{۳}>۳)$$

پ)

$$p:(۳\in\{۱,۲,۵\})\Rightarrow\sim p:\sim(۳\in\{۱,۲,۵\})\equiv(۳\notin\{۱,۲,۵\})$$

ت)

$$p:(۲^۲+۲^۳=۲^۵)\Rightarrow\sim p:\sim(۲^۲+۲^۳=۲^۵)\equiv(۲^۲+۲^۳\neq۲^۵)$$

یا می‌توانیم آن را به‌صورت $(۲^۲+۲^۳<۲^۵)\vee(۲^۲+۲^۳>۲^۵)$ بنویسیم.

ث) نقیض این گزاره را می‌توان به‌صورت «چنین نیست که سعدی شاعر ایرانی باشد.» یا به‌صورت «سعدی شاعر ایرانی نیست.» نوشت.

ج) نقیض این گزاره را می‌توان به‌صورت «چنین نیست که ۱۹۷۱ عددی اول باشد.» یا به‌صورت «۱۹۷۱ عددی اول نیست.» نوشت.

چ) نقیض گزاره: «۳ عددی فرد نیست و عدد $\sqrt{۲}$ گویا نیست.»

ح) نقیض گزاره به‌صورت $(۱^۵\not<۵)\vee(۲\not<۲^{-۱})$ می‌باشد که معادل $(۱^۵\ge۵)\vee(۲\ge۲^{-۱})$ است.

۵

p	q	r
د	د	د
د	د	ن
د	ن	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	د	ن
ن	ن	د
ن	ن	ن

---

۶ الف) گزاره‌نما است، چون یک جملهٔ خبری داریم که دارای متغیر x است و با جایگذاری اعداد به یک گزاره تبدیل می‌شود. هم‌چنین به دلیل داشتن فقط یک متغیر x به آن گزاره‌نمای یک‌متغیره می‌گوییم.

ب) چون متغیر ندارد، گزاره‌نما نیست. پس یک گزاره است.

پ) گزاره‌نما است، زیرا با قرار دادن عدد به جای دو متغیر a و b به یک گزاره با ارزش درست یا نادرست تبدیل می‌شود و به دلیل داشتن دو متغیر آن را گزاره‌نمای دومتغیره می‌نامیم.

---

۷ الف) اگر به جای متغیر a در عبارت $۳a+۴$، به طور مثال اعداد ۲، ۴، ۶ یا ۸ را قرار دهیم، ارزش گزارهٔ حاصل درست است اما اگر اعدادی مثل ۱، ۳، ۵ یا ۷ را قرار دهیم ارزش گزارهٔ حاصل نادرست است.

ب) هرگاه دو عدد را x و y در نظر بگیریم و «تفاضل دو عدد برابر ۷ است.» را به‌صورت «$x-y=۷$» بنویسیم و اگر به جای متغیر x و y به‌صورت زوج‌مرتب (x,y) زوج‌مرتب‌های $(۱۱,۴)$، $(۱۰,۳)$، $(۹,۲)$ یا $(۸,۱)$ را قرار دهیم ارزش گزارهٔ حاصل درست است و اگر زوج‌مرتب‌های $(۱۰,۲)$، $(۱۹,۱۳)$، $(۶,۳)$ یا $(۵,۱)$ را قرار دهیم، ارزش گزارهٔ حاصل نادرست است.

پ) هرگاه سه عدد x ، y و z را در نظر بگیریم و «مجموع سه عدد برابر ۱۰ است.» را به‌صورت $(x+y+z=10)$ بنویسیم و اگر به جای متغیرهای x و y و z در سه‌تایی (x,y,z) ، سه‌تایی‌های $(2,3,5)$ ، $(1,4,5)$ ، $(1,3,6)$ یا $(1,2,7)$ را قرار دهیم، ارزش گزارهٔ حاصل درست است اما اگر سه‌تایی‌های $(1,2,6)$ ، $(1,2,5)$ ، $(1,2,4)$ یا $(1,2,3)$ را قرار دهیم، ارزش گزارهٔ حاصل نادرست است.

---

۸ | آ) به‌جز عدد ۱ و ۲ که در نامساوی صدق نمی‌کنند، بقیهٔ اعداد در نامساوی برقرار هستند، پس مجموعه جواب برابر است با:

$S=\{3,4,5,6,\dots\}$

ب) مجموعه جواب:

$\sqrt{x}=8 \Rightarrow (\sqrt{x})^2=8^2 \Rightarrow x=64 \Rightarrow S=\{64\}$

پ) به ازای $k=1,2,3,\dots$ داریم: $S=\{4,12,24,\dots\}$

---

۹ | آ) دامنهٔ متغیر گزاره‌نمای « x عددی اول است.» مجموعهٔ اعداد طبیعی است و مجموعه جواب آن $S=\{2,3,5,7,\dots\}$ است.

ب) دامنهٔ متغیر گزاره‌نمای « x عددی مضرب ۳ به اضافهٔ یک است.» مجموعهٔ اعداد صحیح است و مجموعه جواب آن $S=\{\dots,-5,-2,1,4,7,\dots\}$ است.

پ) دامنهٔ متغیر گزاره‌نمای « $x^2+3x-4=0$ » مجموعهٔ اعداد حقیقی است و مجموعه جواب آن برابر است با:

$x^2+3x-4=0 \Rightarrow (x+4)(x-1)=0 \Rightarrow x=1\ ,\ x=-4$

$\Rightarrow S=\{1,-4\}$

---

۱۰ | ترکیب عطفی زمانی درست است که تمام گزاره‌ها درست باشد؛ در بقیه حالت‌ها نادرست است. در نتیجه چون چهار گزاره داریم، بنابراین $2^4=16$ حالت وجود دارد که فقط یک حالت درست می‌باشد؛ در نتیجه در $16-1=15$ حالت نادرست است.

---

۱۱ |

گزارهٔ p	گزارهٔ q
مهر اولین ماه فصل پاییز است.	تهران پایتخت ایران است.
۵ عددی اول است.	۵ عددی اول نیست.
۲ عددی زوج نیست.	۴ مربع کامل است.
۳ عددی زوج است.	$4+3=8$

ارزش p	ارزش q	ارزش $p\vee q$	ارزش $p\wedge q$
د	د	د	د
د	ن	د	ن
ن	د	د	ن
ن	ن	ن	ن

---

۱۲ | آ) ارزش گزارهٔ $(7<5)$ درست است و ارزش گزارهٔ $(-3)^2=9$ نیز درست است، پس ارزش گزارهٔ ترکیب فصلی درست است.

ب) ارزش گزارهٔ «۹۳ عددی فرد است.» درست و ارزش گزارهٔ «۹۳ عددی اول است.» نادرست است. پس ارزش گزارهٔ ترکیب فصلی درست است.

پ) ارزش گزارهٔ « $5^4=125$ » نادرست است و ارزش گزارهٔ « $2^9=512$ » درست است. پس ارزش گزارهٔ ترکیب فصلی درست است.

ت) ارزش گزارهٔ« $5!+3!=(5+3)!$ » نادرست است، زیرا:

$8!\neq 6+120 \Rightarrow 40320\neq 126$

و ارزش گزارهٔ $\sqrt{9+25}=3+5 \Rightarrow \sqrt{34}=8$ نیز نادرست است، پس ارزش گزارهٔ ترکیب فصلی نیز نادرست است.

---

۱۳ | آ) گزارهٔ اول یعنی «۱۴۴ بر ۱۲ بخش‌پذیر است.» درست و گزارهٔ دوم یعنی «۱۴۴ بر ۳۶ بخش‌پذیر است.» نیز درست است، در نتیجه ارزش گزارهٔ ترکیب عطفی نیز درست است.

ب) گزارهٔ اول «مسکو پایتخت روسیه است.» درست و گزارهٔ دوم «مسکو یکی از شهرهای ایران است.» نادرست است، پس ارزش گزارهٔ ترکیب عطفی نادرست است.

پ) ارزش گزارهٔ « $-5<-3$ » نادرست و ارزش گزارهٔ « $5<3$ » درست است، پس ارزش گزارهٔ ترکیب عطفی نادرست است.

ت) گزارهٔ $\sqrt{0/01}>\sqrt{0/04} \Rightarrow 0/1>0/2$ دارای ارزش نادرست است و گزارهٔ $(2^3)^2>2^{3^2} \Rightarrow 8^2>2^9 \Rightarrow 64>512$ نیز دارای ارزش نادرست است، پس ارزش گزارهٔ ترکیب عطفی نادرست است.

---

۱۴ | آ) چون از دو گزاره تشکیل شده است، پس این جمله گزارهٔ مرکب است. این جملهٔ مرکب به‌صورت ترکیب فصلی است که برای درست بودن باید حداقل یکی از دو گزاره درست باشد و به دلیل آن‌که $4<11$ است، ارزش این گزارهٔ مرکب درست است.

ب) چون از دو گزاره تشکیل شده است، پس این جمله گزارهٔ مرکب است. این گزارهٔ مرکب به صورت ترکیب عطفی است که چون ارزش هر دو گزاره نادرست است، پس ارزش این گزارهٔ مرکب نیز نادرست است.

پ) چون دارای یک گزاره می‌باشد، بنابراین گزارهٔ مرکب نیست.

ت) به دلیل آن‌که از دو گزاره تشکیل شده است، پس این جمله گزارهٔ مرکب است. دو گزاره به‌صورت ترکیب فصلی است و ارزش هر دو گزاره نادرست است، پس ارزش گزارهٔ مرکب نیز نادرست است.

ث) به دلیل آن که از دو گزاره تشکیل شده است، پس این جمله گزارهٔ مرکب است این جملهٔ مرکب به صورت ترکیب عطفی است که چون ارزش هر دو گزاره درست است پس ارزش این گزارهٔ مرکب نیز درست است.

ج) چون دارای یک گزاره می‌باشد، بنابراین گزارهٔ مرکب نیست.

---

۱۵ | آ)

p	$\sim p$	$p\wedge\sim p$
د	ن	ن
ن	د	ن

در نتیجه: $p\wedge\sim p\equiv F$

پس ارزش منطقی $p\wedge\sim p$ همواره نادرست است.

ب)

p	q	$\sim p$	$p\wedge q$	$\sim p\wedge(p\wedge q)$
د	د	ن	د	ن
د	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	ن	ن
ن	ن	د	ن	ن

در نتیجه: $\sim p\wedge(p\wedge q)\equiv F$

پس ارزش منطقی $\sim p\wedge(p\wedge q)$ همواره نادرست است.

پ)

p	q	$p\vee q$	$\sim(p\vee q)$	$p\wedge\sim(p\vee q)$
د	د	د	ن	ن
د	ن	د	ن	ن
ن	د	د	ن	ن
ن	ن	ن	د	ن

در نتیجه: $p\wedge\sim(p\vee q)\equiv F$

پس ارزش منطقی $p\wedge\sim(p\vee q)$ همواره نادرست است.

۱۶ آ)

p	q	$p\vee q$	$q\vee p$
د	د	د	د
د	ن	د	د
ن	د	د	د
ن	ن	ن	ن

ارزش دو ستون $p\vee q$ و $q\vee p$ یکسان است، پس هم‌ارزی $p\vee q\equiv q\vee p$ برقرار است.

ب)

p	q	r	$p\vee q$	$(p\vee q)\vee r$	$q\vee r$	$p\vee(q\vee r)$
د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	د	د	د	د
د	ن	د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	د	ن	د
ن	د	د	د	د	د	د
ن	د	ن	د	د	د	د
ن	ن	د	ن	د	د	د
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

ارزش دو ستون $(p\vee q)\vee r$ و $p\vee(q\vee r)$ یکسان است پس هم‌ارزی $(p\vee q)\vee r\equiv p\vee(q\vee r)$ برقرار است.

پ)

p	q	r	$q\vee r$	$p\wedge q$	$p\wedge r$	$p\wedge(q\vee r)$	$(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$
د	د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	د	د	ن	د	د
د	ن	د	د	ن	د	د	د
د	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	ن	ن	ن	ن
ن	د	ن	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	د	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

ارزش دو ستون $p\wedge(q\vee r)$ و $(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$ یکسان است پس هم‌ارزی $p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$ برقرار است.

۱۷ آ)

p	q	$p\vee q$	$\sim(p\vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p\wedge\sim q$
د	د	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	د	د	د	د

همهٔ حالت‌های ارزش دو گزارهٔ $(\sim p\wedge\sim q)$ و $\sim(p\vee q)$ یکسان است، پس هم‌ارزی $\sim(p\vee q)\equiv(\sim p\wedge\sim q)$ برقرار است.

ب)

p	q	$p\wedge q$	$\sim(p\wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p\vee\sim q$
د	د	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	ن	د	ن	د	د
ن	د	ن	د	د	ن	د
ن	ن	ن	د	د	د	د

همهٔ حالت‌های ارزش دو گزارهٔ $(\sim p\vee\sim q)$ و $\sim(p\wedge q)$ یکسان است، پس هم‌ارزی $\sim(p\wedge q)\equiv(\sim p\vee\sim q)$ برقرار است.

۱۸ آ)

$$(x-۲)^۲+(y+۱)^۲=۰$$

چون $(x-۲)^۲\geq ۰$ و $(y+۱)^۲\geq ۰$، پس تساوی بالا وقتی برقرار است که:

$$((x-۲)^۲=۰)\wedge((y+۱)^۲=۰)\Rightarrow\begin{cases}x-۲=۰\Rightarrow x=۲\\ \wedge\\ y+۱=۰\Rightarrow y=-۱\end{cases}$$

نتیجه: این ترکیب عطفی وقتی درست است که $x=۲$ و $y=-۱$ باشد.

ب) چون $|x+y|\geq ۰$ و $|۲x-۱|\geq ۰$، پس این تساوی وقتی برقرار است که:

$$(|۲x-۱|=۰)\wedge(|x+y|=۰)\Rightarrow\begin{cases}۲x-۱=۰\Rightarrow ۲x=۱\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}\\ \wedge\\ x+y=۰\Rightarrow\frac{۱}{۲}+y=۰\Rightarrow y=-\frac{۱}{۲}\end{cases}$$

نتیجه: این ترکیب عطفی وقتی درست است که $x=\frac{۱}{۲}$ و $y=-\frac{۱}{۲}$ باشد.

پ) $x^۲+۲x+۱+y^۲=۰ \Rightarrow (x+۱)^۲+y^۲=۰$

چون $y^۲\geq ۰$ و $(x+۱)^۲\geq ۰$، پس تساوی بالا وقتی برقرار است که:

$$((x+۱)^۲=۰)\wedge(y^۲=۰)\Rightarrow\begin{cases}x+۱=۰\Rightarrow x=-۱\\ \wedge\\ y=۰\end{cases}$$

نتیجه: این ترکیب عطفی وقتی درست است که $x=-۱$ و $y=۰$ باشد.

---

۱۹ | آ) «هر نقطه‌ای از دو سر یک پاره‌خط به یک فاصله می‌باشد اگر و تنها اگر روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار داشته باشد»، یک ترکیب دوشرطی است (یعنی از هر کدام دیگری را می‌توانیم نتیجه بگیریم). پس عبارت «لازم و کافی» در جای خالی قرار می‌گیرد.

ب) گزارهٔ $(a=۰\wedge b=۰)\Rightarrow ab=۰$ درست است. بنابراین در جای خالی کلمهٔ «کافی» قرار می‌گیرد.

پ) گزارهٔ «اگر عددی مثبت باشد، آن‌گاه مربع آن مثبت است»، همواره درست است. پس کلمهٔ «لازم» در جای خالی قرار می‌گیرد.

ت) گزارهٔ دوشرطی $(a=۰\vee b=۰)\Leftrightarrow ab=۰$ درست است (زیرا از هر یک دیگری را می‌توانیم نتیجه بگیریم). لذا در جای خالی عبارت «لازم و کافی» قرار می‌گیرد.

ث) «اگر عددی زوج باشد، مربع عدد نیز زوج است و بر عکس». بنابراین این گزاره یک ترکیب دوشرطی همیشه درست است. پس عبارت «لازم و کافی» در جای خالی قرار می‌گیرد.

---

۲۰ | آ) عکس قضیه: اگر $a+b$ گویا باشد، آن‌گاه a و b دو عدد گویا هستند.

ب) خیر، مثال نقض:

عدد ۲ گویا است. $۲=\cancel{\sqrt{۲}}-۱+\cancel{\sqrt{۲}}+a+b=۱$

در نتیجه $a+b=۲$ گویا است ولی اعداد $a=۱+\sqrt{۲}$ و $b=۱-\sqrt{۲}$ گنگ هستند.

---

۲۱ | آ) در این گزارهٔ شرطی ارزش مقدم و تالی درست است، پس ارزش گزارهٔ شرطی نیز درست است.

نقیض گزاره: « a عددی فرد است و $a^۲$ عددی فرد نیست.»

ب) در این گزارهٔ دوشرطی ارزش گزارهٔ « π عددی گویا است.» و گزارهٔ « $\pi=۳/۱۴$ » نادرست است، پس ارزش گزارهٔ دوشرطی درست است.

نقیض گزاره: « π عددی گویا نیست، اگر و تنها اگر $\pi=۳/۱۴$ باشد.»

یا « π عددی گویا است، اگر و تنها اگر $\pi\neq ۳/۱۴$ باشد.»

پ) در این گزارهٔ شرطی ارزش مقدم درست و ارزش تالی نادرست است. بنابراین ارزش گزارهٔ شرطی نادرست است.

نقیض گزاره: «دو مثلث دارای مساحت‌های برابر می‌باشند و دو مثلث همنهشت نیستند.»

ت) در این گزارهٔ شرطی ارزش مقدم و تالی درست است، پس ارزش گزارهٔ شرطی نیز درست است.

نقیض گزاره: «دو مثلث همنهشت هستند و دو مثلث دارای مساحت برابر نیستند.»

ث) در این گزارهٔ شرطی ارزش مقدم و تالی درست است، پس ارزش گزارهٔ شرطی درست است.

نقیض گزاره: «یک چهارضلعی مربع است و قطرهای آن با هم برابر نیستند.»

ج) در این گزارهٔ دوشرطی ارزش گزارهٔ « $۲^۲=۴$ » درست و ارزش گزارهٔ « $۲^{\circ}=۲$ » نادرست است، پس ارزش گزارهٔ دوشرطی نادرست است.

نقیض گزاره: $(۲^۲\neq ۴)\Leftrightarrow(۲^{\circ}=۲)$ یا $(۲^۲=۴)\Leftrightarrow(۲^{\circ}\neq ۲)$

چ) در این گزارهٔ شرطی به دلیل آن‌که مقدم و تالی درست است، ارزش گزارهٔ شرطی درست است.

نقیض گزاره: « a بر b بخش‌پذیر است و a^n بر b^n بخش‌پذیر نیست.»

---

۲۲ | قانون ادخال فاصل: $(p\Rightarrow p\vee q)\equiv T$

p	q	$p\vee q$	$p\Rightarrow p\vee q$
د	د	د	د
د	ن	د	د
ن	د	د	د
ن	ن	ن	د

قانون حذف عاطف: $(p\wedge q\Rightarrow p)\equiv T$ یا $(p\wedge q\Rightarrow q)\equiv T$

p	q	$p\wedge q$	$p\wedge q\Rightarrow p$	$p\wedge q\Rightarrow q$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	د
ن	د	ن	د	د
ن	ن	ن	د	د

---

۲۳ | آ)

p	$p\Rightarrow p$
د	د
ن	د

در نتیجه: $p\Rightarrow p\equiv T$

ب)

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p\vee\sim q$	$\sim p\vee q$	$(p\vee\sim q)\vee(\sim p\vee q)$
د	د	ن	ن	د	د	د
د	ن	ن	د	د	ن	د
ن	د	د	ن	ن	د	د
ن	ن	د	د	د	د	د

در نتیجه: $(p\vee\sim q)\vee(\sim p\vee q)\equiv T$

پ)

p	q	$p\Rightarrow q$	$q\vee p$	$(p\Rightarrow q)\wedge(q\vee p)$	$[(p\Rightarrow q)\wedge(q\vee p)]\Leftrightarrow q$
د	د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن	د
ن	د	د	د	د	د
ن	ن	د	ن	ن	د

در نتیجه: $[(p\Rightarrow q)\wedge(q\vee p)]\Leftrightarrow q\equiv T$

۲۴ آ)

p	F	$p\vee F$
د	ن	د
ن	ن	ن

ارزش دو ستون یکسان است، پس: $p\vee F\equiv p$

ب)

p	q	$q\wedge p$	$p\vee(q\wedge p)$
د	د	د	د
د	ن	ن	د
ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	ن

ارزش دو ستون یکسان است، پس: $p\vee(q\wedge p)\equiv p$

پ)

p	q	$p\Leftrightarrow q$	$\sim(p\Leftrightarrow q)$	$\sim p$	$\sim p\Leftrightarrow q$
د	د	د	ن	ن	ن
د	ن	ن	د	ن	د
ن	د	ن	د	د	د
ن	ن	د	ن	د	ن

ارزش دو ستون یکسان است، پس: $\sim(p\Leftrightarrow q)\equiv\sim p\Leftrightarrow q$

ت)

p	q	r	$q\Rightarrow r$	$p\Rightarrow(q\Rightarrow r)$	$p\wedge q$	$(p\wedge q)\Rightarrow r$
د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	ن	ن	د	ن
د	ن	د	د	د	ن	د
د	ن	ن	د	د	ن	د
ن	د	د	د	د	ن	د
ن	د	ن	ن	د	ن	د
ن	ن	د	د	د	ن	د
ن	ن	ن	د	د	ن	د

ارزش دو ستون یکسان است، پس: $p\Rightarrow(q\Rightarrow r)\equiv(p\wedge q)\Rightarrow r$

۲۵ آ)

p	q	$p\Rightarrow q$	$\sim p$	$\sim p\vee q$
د	د	د	ن	د
د	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	د
ن	ن	د	د	د

گزاره‌های $p\Rightarrow q$ و $\sim p\vee q$ هم‌ارز منطقی هستند، زیرا ارزش دو ستون آن‌ها یکسان است. $p\Rightarrow q\equiv\sim p\vee q$

ب)

p	q	$p\Rightarrow q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q\Rightarrow\sim p$
د	د	د	ن	ن	د
د	ن	ن	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د	د
ن	ن	د	د	د	د

گزاره‌های $p\Rightarrow q$ و $\sim q\Rightarrow\sim p$ هم‌ارز منطقی هستند، زیرا ارزش دو ستون آن‌ها یکسان است.

$p\Rightarrow q\equiv\sim q\Rightarrow\sim p$ (یعنی هرگزارهٔ شرطی با عکس نقیض خود هم‌ارز است.)

پ)

p	q	$p\Rightarrow q$	$\sim(p\Rightarrow q)$	$\sim q$	$p\wedge\sim q$
د	د	د	ن	ن	ن
د	ن	ن	د	د	د
ن	د	د	ن	ن	ن
ن	ن	د	ن	د	ن

گزاره‌های $\sim(p\Rightarrow q)$ و $p\wedge\sim q$ هم‌ارز منطقی هستند، زیرا ارزش دو ستون آن‌ها یکسان است. $\sim(p\Rightarrow q)\equiv p\wedge\sim q$

ت)

p	q	$p\Leftrightarrow q$	$\sim(p\Leftrightarrow q)$	$\sim p$	$\sim p\Leftrightarrow q$	$\sim q$	$p\Leftrightarrow\sim q$
د	د	د	ن	ن	ن	ن	ن
د	ن	ن	د	ن	د	د	د
ن	د	ن	د	د	د	ن	د
ن	ن	د	ن	د	ن	د	ن

گزاره‌های $\sim(p\Leftrightarrow q)$ ، $\sim p\Leftrightarrow q$ و $p\Leftrightarrow\sim q$ هم‌ارز منطقی هستند. زیرا ارزش ستون آن‌ها یکسان است.

$\sim(p\Leftrightarrow q)\equiv\sim p\Leftrightarrow q\equiv p\Leftrightarrow\sim q$

ث)

p	q	r	$p\Rightarrow r$	$q\Rightarrow r$	$(p\Rightarrow r)\wedge(q\Rightarrow r)$	$p\vee q$	$(p\vee q)\Rightarrow r$
د	د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	ن	ن	ن	د	ن
د	ن	د	د	د	د	د	د
د	ن	ن	ن	د	ن	د	ن
ن	د	د	د	د	د	د	د
ن	د	ن	د	ن	ن	د	ن
ن	ن	د	د	د	د	ن	د
ن	ن	ن	د	د	د	ن	د

گزاره‌های $(p\Rightarrow r)\wedge(q\Rightarrow r)$ و $(p\vee q)\Rightarrow r$ هم‌ارز منطقی هستند. زیرا ارزش دو ستون آن‌ها یکسان است.

$$(p\Rightarrow r)\wedge(q\Rightarrow r)\equiv(p\vee q)\Rightarrow r$$

ج)

p	q	r	$q\Rightarrow r$	$p\Rightarrow(q\Rightarrow r)$	$p\Rightarrow r$	$q\Rightarrow(p\Rightarrow r)$
د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	ن	ن	ن	ن
د	ن	د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	د	ن	د
ن	د	د	د	د	د	د
ن	د	ن	ن	د	د	د
ن	ن	د	د	د	د	د
ن	ن	ن	د	د	د	د

گزاره‌های $p\Rightarrow(q\Rightarrow r)$ و $q\Rightarrow(p\Rightarrow r)$ هم‌ارز منطقی هستند، زیرا ارزش دو ستون آن‌ها یکسان است.

$$p\Rightarrow(q\Rightarrow r)\equiv q\Rightarrow(p\Rightarrow r)$$

---

۲۶ به جای اثبات حکم، عکس نقیض آن را ثابت می‌کنیم:

(n عددی زوج است.) $\equiv$ (n عددی فرد است.) $\Rightarrow$ ($n^{۲}$ عددی فرد است.)

$\Rightarrow$ ($n^{۲}$ عددی زوج است.)

اگر n عددی زوج باشد، یعنی $n=۲k$ است و داریم:

$$n=۲k\Rightarrow n^{۲}=(۲k)^{۲}=۴k^{۲}=۲(\underbrace{۲k^{۲}}_{k'\in\mathbb{Z}})=۲k'$$

در نتیجه $n^{۲}$ عددی زوج است.

---

۲۷ به جای اثبات حکم، عکس نقیض آن را ثابت می‌کنیم.

(n مضرب ۵ نیست.) $\equiv$ (n مضرب ۵ است.) $\Rightarrow$ ($n^{۲}$ مضرب ۵ است.)

$\Rightarrow$ ($n^{۲}$ مضرب ۵ نیست.)

در این قسمت دو روش برای اثبات داریم:

روش اول اگر n مضرب ۵ نباشد، یعنی $n\neq ۵k$ و خواهیم داشت:

$$n^{۲}\neq(۵k)^{۲}\neq ۲۵k^{۲}\neq ۵(\underbrace{۵k^{۲}}_{k'\in\mathbb{Z}})\neq ۵k'$$

در نتیجه $n^{۲}$ مضرب ۵ نیست.

روش دوم اگر n مضرب ۵ نباشد، پس به‌صورت زیر است:

$$n=۵k+r\ (۱\leq r\leq ۴)$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم.}} n^{۲}=(۵k+r)^{۲}=۲۵k^{۲}+۱۰kr+r^{۲}$$

$$=۵(\underbrace{۵k^{۲}+۲kr}_{k'\in\mathbb{Z}})+r^{۲}=۵k'+r^{۲}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} r=۱\Rightarrow n^{۲}=۵k'+۱ & (\text{مضرب ۵ نیست.}\ n^{۲}) \\ r=۲\Rightarrow n^{۲}=۵k'+۴ & (\text{مضرب ۵ نیست.}\ n^{۲}) \\ r=۳\Rightarrow n^{۲}=۵k'+۹ & (\text{مضرب ۵ نیست.}\ n^{۲}) \\ r=۴\Rightarrow n^{۲}=۵k'+۱۶ & (\text{مضرب ۵ نیست.}\ n^{۲}) \end{cases}$$

در نتیجه در هر ۴ حالت، $n^{۲}$ مضرب ۵ نیست.

---

۲۸ آ) درست است، زیرا تمام متغیرهای گسسته به‌صورت کمّی گسسته می‌باشند.

ب) نادرست است، زیرا متغیرهای کمّی به دو شاخهٔ پیوسته و گسسته تقسیم می‌شوند. پس متغیر می‌تواند کمّی پیوسته باشد، مانند زمان مطالعه.

پ) نادرست است، زیرا هیچ متغیر گسسته‌ای یک متغیر کیفی نیست، پس مجموعه جواب تهی است.

ت) درست است، زیرا حداقل یک متغیر کمّی گسسته مانند تعداد دانش‌آموزان یک کلاس داریم. پس حداقل یک متغیر کمّی گسسته وجود دارد و این گزاره درست می‌باشد.

---

۲۹ آ) چون حاصل‌ضرب هر دو عدد طبیعی متوالی زوج است، بنابراین برای هر عضو از دامنهٔ متغیر $(\mathbb{N})$، گزاره‌نما به گزاره‌ای درست تبدیل می‌شود، پس این عبارت درست است.

ب) نادرست است، زیرا به عنوان مثال اگر $x=\frac{\pi}{۴}$ باشد، گزاره‌نما به گزاره‌ای نادرست تبدیل می‌شود.

$$\sin\frac{\pi}{۴}+\cos\frac{\pi}{۴}\neq ۱\Rightarrow\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\neq ۱\Rightarrow\frac{۲\sqrt{۲}}{۲}\neq ۱\Rightarrow\sqrt{۲}\neq ۱$$

پ) درست است، زیرا دو عدد صحیح $\{۰,-۳\}$ وجود دارند که در معادله صدق می‌کنند، پس مجموعه جواب گزاره‌نما ناتهی است.

$$x^{۲}+۳x=۰\Rightarrow x(x+۳)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\x=-۳\end{cases}$$

ت) نادرست است، زیرا مجموعه جواب گزاره‌نما مجموعهٔ تهی است.

معادله جواب حقیقی ندارد. $x^{۲}+۴=۰\Rightarrow x^{۲}=-۴$

ث) نادرست است، زیرا $x=۲$ عددی اول است ولی $۲\neq ۲k+۱$

ج) درست است. $x^{۵}+۱=۰\Rightarrow x^{۵}=-۱\Rightarrow x=-۱$

زیرا یک عدد صحیح وجود دارد که در معادله صدق می‌کند.